IGUALDADE

FERNANDO FERREIRA

Numa linguagem do cálculo de predicados, é frequente distinguir um símbolo relacional binário a que se dá o nome de *igualdade* e que se denota (de modo infixo) por $=$. Neste caso, falamos em *cálculo de predicados com igualdade* e postulamos que as interpretações da linguagem verificam os seguintes axiomas:

1. $\forall x(x = x)$;
2. $\forall x \forall y(x = y \wedge \phi \to \phi')$,

onde ϕ é uma fórmula atómica e ϕ' obtém-se de ϕ substituindo a variável x pela variável y em uma ou mais ocorrências. Note-se que em ϕ podem ocorrer variáveis para além de x (e, eventualmente, pode também ocorrer y). Nestes casos, devemos entender um axioma da igualdade do tipo (2) como sendo o seu *fecho universal*, i.e., a fórmula fechada que se obtém de (2) prefixando-a convenientemente com quantificadores universais.

No contexto do cálculo de predicados *com igualdade*, apenas consideramos estruturas que satisfaçam os axiomas da igualdade. Assim, por exemplo, uma verdade lógica do cálculo de predicados com igualdade é uma fórmula fechada que é verdadeira em todas as estruturas que satisfaçam os axiomas da igualdade e a noção de consequência semântica apenas considera estruturas que satisfaçam os axiomas da igualdade. Com esta estipulação tem-se, como deve ser:

Proposição 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. As seguintes fórmulas são logicamente válidas:*

3. $x = y \to y = x$;
4. $x = y \wedge y = z \to x = z$;
5. $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$, *para símbolos funcionais n-ários* f;
6. $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n)$, *para símbolos relacionais n-ários* R.

Demonstração. Note-se que $\forall x \forall y(x = y \wedge x = x \to y = x)$ é um axioma do tipo (2). Agora, com (1), conclui-se a simetria (3). A transitividade (4) é consequência do axioma de tipo (2) $\forall x \forall y(y = x \wedge y = z \to x = z)$ e da simetria da igualdade. (5) conclui-se a partir de (1) e de n aplicações de (2). Para ver (6), aplique-se (2) também n vezes. $\square$

Claro que queremos que (2) seja verdadeiro para *qualquer* fórmula ϕ (desde que não haja conflito de variáveis), não apenas para fórmulas atómicas. De facto, como mostraremos abaixo, o caso geral segue-se do caso atómico. O que se ganha com a manobra restritiva em que se tomam apenas fórmulas atómicas ϕ no axioma esquema (2) é que, assim, os axiomas da igualdade são constituídos por fórmulas universais. A formulação restrita permite generalizar o teorema de Herbrand. Com efeito, seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade com pelo menos uma constante. Suponhamos que a fórmula fechada $\exists y \phi(y)$, onde ϕ não tem quantificadores, é uma verdade lógica do cálculo com igualdade. Por definição, esta fórmula é verdadeira em todas as estruturas de $\mathcal{L}$ que satisfazem os axiomas da igualdade. I.e., $IG \models \exists y \phi(y)$, onde IG é o conjunto dos axiomas da igualdade (1) e (2) acima (a noção de consequência semântica é a original). Atendendo ao facto de IG ser constituído por fórmulas fechadas universais conclui-se, por um corolário do teorema de Herbrand, que existem termos fechados $t_1, \ldots, t_n$ e instanciações dos axiomas da igualdade $\iota_1, \ldots, \iota_r$ tais que

$$\iota_1 \wedge \cdots \wedge \iota_r \rightarrow \phi(t_1) \vee \cdots \vee \phi(t_n)$$

é uma tautologia. Neste caso, diz-se que $\phi(t_1) \vee \cdots \vee \phi(t_n)$ é uma *quasi-tautologia*.

Dada uma estrutura $\mathfrak{M}$ que obedeça aos axiomas da igualdade, por (1), (3) e (4) sabemos que $=^{\mathfrak{M}}$ é uma relação de equivalência. De facto, por (5) e (6), $=^{\mathfrak{M}}$ é mesmo uma relação de congruência com respeito às interpretações dos símbolos funcionais e relacionais da linguagem. Considere-se, então, a estrutura quociente $\mathfrak{Q}$ cujo domínio é constituído pelo conjunto quociente $|\mathfrak{M}|/{=^{\mathfrak{M}}}$ e cujas interpretações dos símbolos relacionais, funcionais e constantes são definidas da maneira natural, nomeadamente:

i. $([a_1]_=, \ldots, [a_n]_=) \in R^{\mathfrak{Q}}$ sse $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}}$, para R símbolo relacional n-ário;
ii. $f^{\mathfrak{Q}}([a_1]_=, \ldots, [a_n]_=) = [f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)]_=$, para f símbolo funcional n-ário ($n > 0$);
iii. $c^{\mathfrak{Q}} = [c^{\mathfrak{M}}]_=$;

onde, dado $a \in |\mathfrak{M}|$, $[a]_=$ é a classe de equivalência de a pela relação de equivalência $=^{\mathfrak{M}}$. Como observámos, a estrutura quociente está bem definida. Além disso, por construção goza da propriedade da *normalidade*:

Definição 1. *Uma estrutura $\mathfrak{Q}$ para uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade é* normal *se a interpretação da igualdade é a diagonal de $|\mathfrak{Q}| \times |\mathfrak{Q}|$, i.e., se $=^{\mathfrak{Q}}$ é o conjunto $\{(a, b) \in |\mathfrak{Q}| \times |\mathfrak{Q}| : a = b\}$.*

É claro que os axiomas da igualdade são verdadeiros nas estruturas normais. Por outro lado, mostrámos como associar canonicamente uma estrutura normal $\mathfrak{Q}$ a uma dada estrutura $\mathfrak{M}$ duma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. Tem-se facilmente, por indução na complexidade dos termos:

Lema 1. *Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura do cálculo de predicados com igualdade. Então, para todo termo t e atribuição s, tem-se $\widetilde{s_=}(t) = [\tilde{s}(t)]_=$.*

No lema, $s_=$ é a atribuição que a cada variável x faz corresponder o elemento $[s(x)]_=$ do domínio da estrutura quociente $\mathfrak{Q}$. Vem:

Proposição 2. *Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura duma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. Então, para toda a fórmula ϕ e atribuição s, tem-se*

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi\,[s] \text{ se, e somente se, } \models_{\mathfrak{Q}} \phi\,[s_=].$$

Em particular, se ϕ é uma fórmula fechada, $\models_{\mathfrak{M}} \phi$ sse $\models_{\mathfrak{Q}} \phi$.

Demonstração. Argumenta-se por indução na complexidade de ϕ. No caso atómico tem-se:

$$\begin{array}{lll} \models_{\mathfrak{M}} R(t_0, \ldots, t_{n-1})\,[s] & \text{sse} & (\tilde{s}(t_0), \ldots, \tilde{s}(t_{n-1})) \in R^{\mathfrak{M}} \\ & \text{sse} & ([\tilde{s}(t_0)]_=, \ldots, [\tilde{s}(t_{n-1})]_=) \in R^{\mathfrak{Q}} \\ & \text{sse} & (\widetilde{s_=}(t_0), \ldots, \widetilde{s_=}(t_{n-1})) \in R^{\mathfrak{Q}} \\ & \text{sse} & \models_{\mathfrak{Q}} R(t_0, \ldots, t_{n-1})\,[\widetilde{s_=}]. \end{array}$$

Os casos Booleanos são de discussão fácil. De seguida, discutimos apenas a quantificação universal:

$$\begin{array}{lll} \models_{\mathfrak{M}} \forall x \phi\,[s] & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{M}} \phi\,[s^x_a] \\ & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{Q}} \phi\,[(s^x_a)_=] \\ & & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{Q}} \phi\,[(s_=)^x_{[a]_=}] \\ & \text{sse} & \models_{\mathfrak{Q}} \forall x \phi\,[s_=]. \end{array}$$

□

Proposição 3. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. Considere-se Γ e ϕ um conjunto de fórmulas fechadas e uma fórmula fechada (respectivamente). Então:*

(a) *Γ tem um modelo sse tem um modelo normal.*
(b) *$\Gamma \models \phi$ sse ϕ é verdadeira em todos os modelos normais de Γ.*
(c) *ϕ é uma verdade lógica sse é verdade em todas as estruturas normais.*

Demonstração. Vamos verificar apenas a alínea (a). A implicação da direita para a esquerda decorre do facto de que as estruturas normais satisfazem os axiomas da igualdade. Reciprocamente, suponhamos que existe um modelo $\mathfrak{M}$ de Γ. Pela proposição anterior, a estrutura normal associada $\mathfrak{Q}$ também é modelo de Γ. □

O seguinte é agora claro:

Proposição 4. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade. Então as seguintes fórmulas são verdades lógicas:*

2'. $\forall x \forall y (x = y \land \phi \to \phi')$,

onde ϕ é uma fórmula qualquer, y está livre para x em ϕ e ϕ' obtém-se de ϕ substituindo uma ou mais ocorrências livres da variável x pela variável y.

O teorema da compacidade tem uma formulação própria para o cálculo de predicados *com igualdade*: Se Γ é um conjunto de fórmulas fechadas duma linguagem do cálculo proposicional com igualdade e se toda a parte finita de Γ tem um modelo (normal), então Γ tem um modelo (normal). Isto é uma consequência simples do teorema da compacidade para o cálculo de predicados e de (a) da Proposição 3.

Os resultados anteriores permitem restringir as estruturas das linguagens do cálculo de predicados *com igualdade* a estruturas normais. De ora em diante, a menos que o digamos explicitamente, efetuamos essa restrição.