Folha **E** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Março de 2017

1. Diga quais são os dois últimos dígitos de 3^{35}.

2. Qual é a ordem de 2 módulo 17?

3. Obtenha $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $35x + 55y + 77z = 1$.

4. Dados $a_1, a_2, \ldots a_k$ elementos de $\mathbb{N}$, defina-se $\mathrm{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ como o máximo dos divisores comuns a todos os $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

   (a) Mostre que $\mathrm{mdc}(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_k) = \mathrm{mdc}(\mathrm{mdc}(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_k)$.

   (b) Mostre que existem elementos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$ tais que
   $$\mathrm{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k.$$

5. Encontre um número de três dígitos (decimal) que deixa resto 4 quando dividido por 7, 9 e 11.

6. Seja p um primo tal que $p \equiv 3 \pmod 4$. Mostre que não há nenhum inteiro a tal que $p \mid (a^2 + 1)$. (Use o pequeno teorema de Fermat.)

7. Mostre que $2^{11} - 1$ ($= 2047$) é um número composto usando o pequeno teorema de Fermat com base 3. (Faça mesmo as contas...)

8. Encontre um inteiro a tal que $102^{70} + 1 \equiv a^{37} \pmod{113}$. (Calcule mesmo 102^{70} mod 113. Se quiser use o SAGE.)

9. Na aula teórica afirmámos que 561 é um número de Carmichael mas não o verificámos.

   (a) Note que $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Use o pequeno teorema de Fermat para mostrar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,
   $$a^{561} \equiv a \pmod 3, \qquad a^{561} \equiv a \pmod{11}, \qquad a^{561} \equiv a \pmod{17}.$$

   (b) Diga por que é que estas congruências mostram que 561 é um número de Carmichael.

   (c) Use a ideia da alínea anterior para mostrar que 1729 é um número de Carmichael.