Folha **A** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Fevereiro de 2017

1. Calcule o quociente e o resto da divisão inteira de (a) 300 por 17, (b) 729 por 31, (c) 300 por -17, (d) 18756407 por 937 e (e) -729 por 31.

2. Calcule diretamente nas bases em questão $(212)_3 \cdot (122)_3$, $(101101)_2 \cdot (11001)_2$, $(10011001)_2 : (1011)_2$ e $(40122)_7 : (126)_7$. Converta cada uma destes números para a base 10, efectue a operação em base 10 e, depois, converta o resultado para a base em questão.

3. Considere o alfabeto de 26 letras (inclue-se o K, W e Y) como sendo os símbolos da notação posicional de base 26 (em que a ordem alfabética corresponde à ordem crescente dos símbolos). Calcule o produto SIM $\cdot$ NAO.

4. Seja b um natural maior do que 1. Dado $n \in \mathbb{N}$ denota-se por $lh_b(n)$ o comprimento de representação de n em base b. Mostre que $lh_b(n) = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$ (onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x, i.e., o maior inteiro que não excede x).

5. Mostre a seguinte igualdade logarítmica: $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$, para todos os reais positivos a, b e c com $a \neq 1$ e $c \neq 1$.

6. Seja b um natural diferente de 1 (uma base). Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que existem inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_k$ com $0 \leq a_i < b$ (para $0 \leq i \leq k$) e $a_k \neq 0$ tais que $n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$. Argumente que estes números são únicos.

7. Sejam a e b números naturais com $a \geq b$. Suponha que $a = bq + r$ e $b = rs + t$, onde q, r, s e t são inteiros não negativos com $0 < r < b$ e $0 \leq t < r$. Mostre que $t < \frac{b}{2}$.

8. Seja $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uma sucessão de números naturais tal que $a_{i+1} \leq \frac{1}{2} a_i$, para todo $0 \leq i < n$. Mostre que $2^n \leq a_0$.

9. Calcule $\mathrm{mdc}(1547, 560)$, $\mathrm{mdc}(455, 1235)$ e $\mathrm{mdc}(323, 437)$.

10. Seja n um número natural diferente de 1. Mostre que n é primo se, e somente se, não é divisível por nenhum primo p com $p \leq \sqrt{n}$.

11. Enumere todos os primos até 200 usando o crivo de Eratóstenes.