Folha **B** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Fevereiro de 2017

1. Mostre que $n!$ divide sempre o produto de n números naturais consecutivos. (Sugestão: considere um coeficiente binomial adequado.)

2. Dado um elemento $a + b\sqrt{-5}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, define-se a sua *norma* como sendo $N(a + b\sqrt{-5}) := a^2 + 5b^2$.

   (a) Mostre que a norma dum produto é o produto das normas.

   (b) Descubra os "divisores" de 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ e $1 - \sqrt{-5}$.

3. Usando o teorema fundamental da aritmética mostre o seguinte:

   (a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \perp m$ e nm um número quadrado. Mostre que n e m são quadrados.

   (b) Dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, mostre que se $a^n \mid b^n$ então $a \mid b$.

   (c) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Mostre que se $a \mid bc$ e $a \perp b$, então $a \mid c$. Conclua o seguinte: dados $a, b, n \in \mathbb{N}$ com $a \perp b$, se $a \mid b^n$ então $a = 1$.

   (c) Seja p um número primo e $a, k \in \mathbb{N}$. Mostre que se $p \mid a^k$ então $p^k \mid a^k$.

4. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ ímpares. Mostre que $\mathrm{mdc}(n + m, n - m) = 2\,\mathrm{mdc}(n, m)$.

5. (a) Mostre que há um número infinito de primos da forma $4n - 1$. (b) Mostre que há um número infinito de primos da forma $6n - 1$. (Sugestão: veja no livro.)

6. Seja n, k e r inteiros. Mostre que se $0 \le k < r \le \frac{n}{2}$, então $\binom{n}{k} < \binom{n}{r}$. (Sugestão: calcule o quociente entre $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k+1}$.)

7. Usando o teorema do número primo mostre que $\lim_n \frac{\pi(n)}{n} = 0$.

8. Seja n um número natural.

   (a) Tome-se k inteiro tal que $0 \le k \le n$. Mostre que $\binom{n}{k} \le n^{\pi(n)}$. (Sugestão: use o facto de que se $p^r \mid \binom{n}{k}$ então $p^r \le n$, para p primo.)

   (b) Conclua que $\frac{2n \ln 2}{\ln(2n)} \le 1 + \pi(2n)$. (Sugestão: ensanduiche $\binom{2n}{n}$ entre dois valores apropriados e tome logaritmos.)