

Folha C de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Fevereiro de 2017

1. Mostre que a função $x \mapsto (1 + \sqrt{2x}) \ln(2x)$ tem segunda derivada negativa em $]0, +\infty[$.
2. (a) Dado x um número real maior do que 1, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge (use o teste do integral).
(b) Dado a um número real positivo, mostre que $\zeta(1+a) \leq \frac{1+a}{a}$.
3. Mostre que $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nk^n} < \infty$. (Mostre que para $n, k \geq 3$, se tem $n^2 k^2 \leq nk^n$.)
4. Seja n um número natural. Mostre que, para todo o número complexo s com $\operatorname{Re}(s) > 0$, se tem

$$\int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| dx \leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}$$

(Note que $\int_n^x \frac{1}{u^{s+1}} du = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right)$ e majorize o valor absoluto do integrando, onde $n \leq u \leq x \leq n+1$.)

5. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, o resto da divisão de a por n é igual ao resto da divisão de b por n .
6. (a) Construa as tabelas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
(b) Construa as tabelas de multiplicação de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ e $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$.
(c) Diga quais são os ordens dos elementos de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$. Faça o mesmo para $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ e $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$.
7. Calcule $347 + 513 \pmod{763}$, $3274 + 1238 + 7231 + 6437 \pmod{9254}$, $153 \cdot 287 \pmod{353}$, $357 \cdot 862 \cdot 193 \pmod{943}$, $5327 \cdot 6135 \cdot 7139 \cdot 2187 \cdot 5219 \cdot 1873 \pmod{8157}$, $137^4 \pmod{327}$ e $373^6 \pmod{581}$.
8. Resolva as equações: (a) $x + 17 \equiv 23 \pmod{37}$; (b) $x + 42 \equiv 19 \pmod{51}$; (c) $x^2 \equiv 3 \pmod{11}$; (d) $x^2 \equiv 2 \pmod{13}$; (e) $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ e (f) $x^3 - x^2 + 2x - 2 \equiv 0 \pmod{11}$. Apresente os resultados no sistema completo de resíduos canônico e no sistema menor.