O LEGADO LOGICISTA E O PROGRAMA DE HILBERT

FERNANDO FERREIRA

rascunho

Até meados do século XIX a matemática desenvolveu-se por meio de métodos e construções muito concretas, baseados nos números naturais, no cálculo infinitesimal ou na geometria. Um desenvolvimento importante do final desse período *vis-à-vis* a mudança do carácter da matemática que iria ocorrer mais tarde foi, sem dúvida, a procura de condições suficientes para a convergência das séries de Fourier. Este problema levou à consideração de funções dum ponto de vista abstrato, i.e., sem necessariamente serem dadas através duma expressão analítica. Na segunda metade desse século, o aparecimento da teoria dos conjuntos com o seu tratamento do infinito como totalidade atual, a resolução de certos problemas de carácter tradicional por novos métodos assim como o processo de rigorização da análise matemática (por Augustin Cauchy, Bernard Bolzano, Karl Weierstrass, *et al.*) desencadearam um desenvolvimento da matemática por linhas cada vez mais abstratas e menos construtivas. Um notável exemplo dum resultado demonstrado por métodos então considerados suspeitos é hoje conhecido em álgebra como o teorema da base de Hilbert. A demonstração deste teorema por David Hilbert gerou grande controvérsia ao tempo devido ao uso dum ponto de vista mais abstrato e à aparente falta de conteúdo construtivo da demonstração. Paul Gordan, na altura o grande especialista dessa área, foi o árbitro do artigo que Hilbert submeteu à reputada revista *Mathematische Annalen*, tendo escrito no seu relatório a Felix Klein (o editor da revista) o seguinte: "O problema não está na forma ... jaz mais profundo. Hilbert desdenhou apresentar os seus resultados seguindo regras formais, pensa ser suficiente que ninguém possa contradizer a sua demonstração ... está satisfeito por pensar que a importância e a correção dos seus resultados são suficientes. ... para um trabalho abrangente para os *Annalen*, isto é insuficiente". Apesar da situação delicada em que foi colocado, Klein pressentiu a importância dos novos métodos de Hilbert e acabou por aceitar o artigo. Ficou célebre o seguinte comentário de Gordan à demonstração de Hilbert: *Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie!*

A mudança operada na matemática a partir do final do século XIX apenas se pode comparar em alcance ao aparecimento do método axiomático na antiguidade Grega e ao cálculo infinitesimal no século XVII. Os novos métodos em matemática geraram controvérsia entre os mais insignes matemáticos da época, viz. Hilbert, Cantor, Leopold Kronecker, Henri Poincaré, Richard Dedekind, Giuseppe Peano, Henri Lebesgue, Émile Borel, René Baire, Jacques Hadamard, Ernst Zermelo e, especialmente, Luitzen Brouwer. Neste contexto, não deve surpreender que o surgimento de paradoxos em teoria dos conjuntos na viragem do século XIX para o século XX tenha causado furor e crise. Os paradoxos puseram em causa a *nova* matemática emergente, agudizando a controvérsia entre os tradicionalistas e os modernos, estes últimos cultivadores de métodos fecundos mas, aparentemente, mal fundamentados. O paradoxo mais básico descreve-se facilmente e ficou conhecido por paradoxo de Russell (descoberto por Bertrand Russell em 1902 e, independentemente, por Zermelo). A teoria dos conjuntos baseava-se, na altura, numa conceção lógica dos conjuntos, segundo a qual estes são dados por *extensões* de predicados, sendo (numa certa aceção) emanações de predicados. Assim, dado um predicado P a sua *extensão* é o conjunto $\{x : P(x)\}$ dos elementos que satisfazem a dita propriedade. Considere-se então a propriedade "$x \notin x$" e a respetiva extensão r. Por definição de r tem-se que, para todo x, $x \in r$ sse $x \notin x$. Em particular, $r \in r$ sse $r \notin r$. A situação é paradoxal.

No campo daqueles que defendiam a nova matemática, perfilaram-se duas reacções ao paradoxo: por um lado, a reação logicista, motivada pelo desígnio filosófico de reduzir a matemática à lógica e de que foram principais protagonistas, Russell e Alfred Whitehead; por outro, o projeto de gizar uma axiomatização da teoria dos conjuntos livre de paradoxos. O primeiro projeto, iniciado no último quartel do século XIX por Gottlob Frege, soçobrou devido a dificuldades intrínsecas. Não obstante, o logicismo legou à matemática a axiomatização rigorosa da lógica (através do trabalho seminal de Frege no *Begriffsschrift* de 1879) e o desenvolvimento da matemática – por Frege, Russell e Whitehead – em sistemas dedutivos puramente sintáticos. A axiomatização da teoria dos conjuntos procedeu (de início) informalmente e originou o sistema axiomático hoje vigente na fundamentação da matemática (a teoria ZFC de Zermelo-Fraenkel munida do axioma da escolha) e a decorrente conceção *iterativa* do universo dos conjuntos.

O campo de pendor construtivista espraiava-se por um arco-íris de várias tonalidades. A tonalidade mais radical, denominada de *intuicionismo*, proposta por Brouwer no final da primeira década do século passado, defendia uma mudança da própria lógica, não admitindo a lei to terceiro excluído. Numa segunda fase, com início uma década mais tarde, o intuicionismo radicalizou-se ao ponto de admitir princípios que contradizem resultados amplamente aceites, nomeadamente o princípio de que *toda* a função real de variável real é necessariamente contínua. Ora, Brouwer era um matemático proeminente, respeitado e admirado pelos seus trabalhos de alto nível em análise e topologia, sendo as suas ideias fundacionais conhecidas e debatidas na comunidade matemática. No início da sua fase mais radical contou inclusivamente com o apoio entusiástico de outro grande matemático, Hermann Weyl, o qual fora estudante dileto do próprio Hilbert. Se houve altura na história da matemática em que, seriamente, se pôde contemplar um *cisma* na matemática foi durante uns breves anos no início dos anos vinte do século passado.

Este não é o local apropriado para discutir este período fascinante da história da matemática (e das propostas fundacionais). Pretende-se tão somente enquadrar a reação de Hilbert à problemática da fundamentação da matemática e a sua defesa da nova matemática contra os construtivistas e, em especial, contra Brouwer. Hilbert propôs-se defender vigorosamente a nova matemática, como atesta a seguinte declaração: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

O génio de Hilbert gizou um programa fundacional que se apoiava num ponto arquimediano aceitável para todas as partes em conflito. Este ponto é a *matemática finitista*. Hilbert nunca delineou precisamente o finitismo, e hoje este assunto é motivo de debate filosófico e exegese histórica. É, no entanto, seguro dizer que matemática finitista assenta na faculdade de conceber e distinguir sequências finitas de símbolos e de operar com elas por meio de certas transformações efetivas e *iterações* destas e que, negativamente, exclui asserções que se obtêm através de quantificações sobre domínios infinitos. Vamos cingir-nos a apenas um único símbolo $|$, obtendo desta forma as sequências ε, $|$, $||$, $|||$, $||||$, $|||||$, etc (a primeira sequência é a palavra vazia). A concatenação do símbolo $|$ a uma dada sequência é uma das operações permitidas (a operação *sucessor*) e a iteração desta operação a partir da palavra vazia gera essencialmente a sequência dos números naturais. Dito de outro modo, um número *arbitrário* obtém-se por iteração da operação sucessor a partir da palavra vazia. É possível argumentar convincentemente que a possibilidade de efetuar (sem restrições) iterações justifica finitisticamente *cada* operação recursiva primitiva entre números naturais. Na terminologia de Hilbert, uma *asserção real*, ou *com conteúdo* (inhaltich), é uma igualdade do tipo $||| + |||||=||||||||$, onde a operção de adição é especificada de modo recursivo primitivo pelos esquemas: $\mathfrak{a}+\varepsilon = \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}|) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})|$. Em particular, as asserções reais podem ser decididas efetivamente ao fim dum número finito de passos. Por exemplo, às fórmulas fechadas rudimentares correspondem de modo natural asserções reais. O cálculo proposicional clássico aplica-se sem problema a estas asserções.

No programa fundacional de Hilbert também jogam um papel fundamental certos esquemas assertóricos, que denominamos de *expressões reais esquemáticas*, que têm o efeito de exprimir

rascunho

afirmações de carácter geral. Estas afirmações devem ser interpretadas como formulações de um esquema de asserções reais *strictu sensu*, não como uma asserção universal (quantificação). Alguns destes esquemas são verdadeiros por definição, como é o caso dos dois esquemas definidores da operação de adição do parágrafo anterior. Outros esquemas são passíveis de justificação finitista, como é o caso da expressão real esquemática $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. A justificação finitista duma expressão real esquemática usa, tipicamente, um princípio que vai necessariamente além de meros cálculos particulares, viz. a inferência que permite passar duma asserção real $P(\varepsilon)$ e duma expressão real esquemática $P(\mathfrak{a}) \to P(\mathfrak{a}\,|)$ para a expressão real esquemática $P(\mathfrak{a})$. Este *princípio de indução finitista* justifica-se finitisticamente na medida em que decorre da própria conceção do processo iterativo subjacente à noção de número arbitrário, em exata analogia com a justificação finitista das operações recursivas primitivas.

Porém, para Hilbert, deixa de ter sentido *real* negar uma expressão real esquemática $P(\mathfrak{a})$. Segundo Hilbert, uma tal negação é uma asserção de carácter *ideal*, podendo ser escrita através do símbolo (que Hilbert classificaria de "transfinito") de quantificação existencial: $\exists x \neg\phi(x)$, onde $\phi(x)$ é uma fórmula correspondente à asserção esquemática real $P(\mathfrak{a})$. Por exemplo, as asserções da linguagem da aritmética de Peano que não sejam da forma $\forall x \phi(x)$, com ϕ uma fórmula rudimentar, são consideradas ideais (sem conteúdo) por Hilbert. É com este tipo de asserções, sem conteúdo, que a matemática não finitista (infinitista) opera. Não é por acaso que Hilbert classifica estas asserções de "ideais". A certa altura Hilbert escreve: "Lembremo-nos de que *somos matemáticos* e de que, como matemáticos, muitas vezes nos encontrámos em situações difíceis, das quais fomos salvos pelo método engenhoso dos elementos ideais (...) de modo similar, para preservar as leis da lógica (...), *temos de suprir as asserções finitistas com asserções ideais*".

As asserções ideias a que Hilbert se refere incluem aquelas usadas pelos matemáticos quando utilizam o quantificador existencial, ou formulam o princípio de indução para fórmulas quaisquer, ou falam de objetos infinitistas (conjuntos infinitos) como cortes de Dedekind, ultrafiltros, medidas, ordinais, funções escolha, etc. Hilbert estabelece um paralelo entre a inclusão de asserções ideais na linguagem matemática e a manobra tipicamente matemática de alargar o domínio original de estudo para melhor investigar as entidades de partida: "Assim como, por exemplo, os números negativos são indispensáveis em teoria dos números e, modernamente, esta disciplina apenas é possível através dos ideais de Kummer-Dedekind, assim a matemática científica apenas é possível através da inserção de asserções ideais." O que são então, para Hilbert, as asserções ideais? É nesta altura que o legado logicista desempenha um papel fulcral. Ainda que – ao contrário de Hilbert – o logicismo veja as asserções infinitistas como significativas (asserções com conteúdo), motivos próprios levaram o programa logicista a regimentar a matemática através dum cálculo dedutivo puramente sintático. Hilbert dá agora o passo decisivo de encarar este cálculo como mera manipulação finitista de símbolos destituídos de significado. As asserções ideias são, assim, meras fórmulas não interpretadas que participam num cálculo dedutivo puramente *formal*. Hilbert, porém, adverte: "Há apenas uma condição, ainda que absolutamente necessária, a que o método dos elementos ideais está sujeito. Essa condição consiste numa *demonstração de consistência*, pois a expansão do domínio pela adição de elementos ideais só é legítima se essa expansão não causa o aparecimento de contradições no domínio original, mais estrito." Como discutiremos no próximo capítulo, a asserção de consistência dum sistema formal é uma expressão real esquemática, com conteúdo e, portanto, passível de ser justificada finististicamente. O programa de Hilbert dependia desta justificação finitista.

rascunho