DEDUÇÃO FORMAL NO CÁLCULO DE PREDICADOS

FERNANDO FERREIRA

Analogamente ao cálculo proposicional, por motivos de economia confinamo-nos aos conetivos $\neg$, $\rightarrow$ e $\forall$ no nosso tratamento da dedução formal. Os outros conetivos devem ser vistos como definidos a partir destes do modo usual (p. ex., $\exists x\phi$ abrevia $\neg\forall x\neg\phi$). Vamos tomar para axiomas do cálculo de predicados (duma dada linguagem) os três axiomas esquemas do cálculo proposicional e dois esquemas logicamente válidos do cálculo de predicados:

- $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;
- $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \rho))$;
- $(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi)$;
- $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$, desde que x não ocorra livre em ϕ;
- $\forall x\phi \rightarrow \phi^x_t$, para t termo livre para x em ϕ.

Há duas regras de inferência: *Modus Ponens* e a regra da generalização. Esta última diz que se pode inferir $\forall x\phi$ de ϕ. Podemos agora definir a noção de *dedução formal no cálculo de predicados* à semelhança do que se fez com o cálculo proposicional (não vale a pena explicitar a definição). Analogamente, escreve-se $\Gamma \vdash \phi$, onde Γ é um conjunto de fórmulas *fechadas* e ϕ uma fórmula qualquer, quando existe uma dedução formal de ϕ a partir de Γ (e diz-se que ϕ é *consequência formal* de Γ). O leitor deve observar que os axiomas do cálculo de predicados incluem os axiomas do cálculo proposicional. Por conseguinte, toda a tautologia é consequência formal do conjunto vazio de fórmulas. De facto, nas próximas secções, vamos usar a existência de algumas deduções formais. As duas seguintes são de fácil justificação:

> Se ϕ é uma fórmula em que a variável x não ocorre livre, então $\vdash \exists x\phi \rightarrow \phi$.
>
> Se t é um termo livre para x na fórmula ϕ, então $\vdash \phi^x_t \rightarrow \exists x\phi$.

Teorema da Correcção do Cálculo de Predicados. *Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas e ϕ uma fórmula fechada. Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \models \phi$.*

Demonstração. Suponhamos que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ é uma dedução formal de ϕ a partir de Γ. Seja $\mathcal{M}$ um modelo arbitrário de Γ. Demonstra-se sem dificuldade, por indução completa em i (com $1 \leq i \leq n$), que se tem $\mathcal{M} \models \hat{\phi}_i$, onde $\hat{\phi}_i$ é o fecho universal de ϕ_i. Em particular, $\mathcal{M} \models \phi$. Dada a arbitrariedade de $\mathcal{M}$, tem-se o resultado pretendido. $\square$

O resultado recíproco é o teorema da completude de Gödel (versão dedutiva) e a sua demonstração é o objetivo do próximo capítulo.

Teorema da Dedução do Cálculo de Predicados. *Seja $\Gamma \cup \{\phi\}$ um conjunto de fórmulas fechadas e ψ uma fórmula tal que $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Então, $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$.*

Demonstração. O argumento segue a demonstração que demos do teorema da dedução para o cálculo proposicional. Dada $\psi_1, \ldots, \psi_n$ uma dedução formal de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\phi\}$, mostra-se por indução completa em i (com $i \leq n$) que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_i$. O único caso novo a discutir é quando se aplica a regra da generalização. Suponhamos que ψ_i é da forma $\forall x\psi_k$, para certo $k < i$. Por hipótese de indução, $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_k$. Logo, pela regra de generalização, tem-se $\Gamma \vdash \forall x(\phi \rightarrow \psi_k)$. Dado que $\forall x(\phi \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi_k)$ é um axioma do cálculo de predicados, por *Modus Ponens* conclui-se $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_i$. $\square$

De ora em diante, vamos usar o termo “teoria” para uma noção diferente daquela que temos usado.

Definição 1. *Dada uma linguagem do cálculo de predicados com igualdade, uma* teoria *(no sentido formal) consiste num conjunto* T *de fórmulas fechadas da linguagem tal que* $\phi \in \mathsf{T}$ *sempre que* $\mathsf{T} \vdash \phi$ *(para fórmulas fechadas* ϕ*).*

Não há grande perigo de confusão entre a noção semântica e formal de *teoria* pois, pela versão dedutiva do teorema da completude de Gödel, são noções equivalentes. Porém, do ponto de vista da discussão do programa de Hilbert e da sua refutação pelos teoremas de incompletude de Gödel a noção pertinente é a de teoria no sentido formal do termo. Vamos agora definir a noção de *consistência* formal, central no programa de Hilbert:

Definição 2. *Um conjunto de fórmulas fechadas* Γ *diz-se* consistente *se não existir nenhuma fórmula* ϕ *tal que* $\Gamma \vdash \phi$ *e* $\Gamma \vdash \neg\phi$*.*

Diz-se que um conjunto de fórmulas é *inconsistente* se não é consistente. Note-se que se Γ é inconsistente então *toda* a fórmula é consequência formal de Γ. Com efeito, se $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \vdash \neg\phi$ então conclui-se, por duas aplicações de *Modus Ponens*, que $\Gamma \vdash \psi$ para qualquer fórmula ψ pois a fórmula $\phi \to (\neg\phi \to \psi)$ é uma tautologia e, portanto, consequência formal.

Proposição 1. *Seja* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *um conjunto de fórmulas fechadas. Tem-se que* $\Gamma \vdash \phi$ *se, e somente se,* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *é inconsistente.*

Demonstração. Suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é inconsistente. Então, qualquer fórmula é consequência formal de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Em particular, $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$. Pelo teorema da dedução, sai $\Gamma \vdash \neg\phi \to \phi$. Ora, a fórmula $(\neg\phi \to \phi) \to \phi$ é uma tautologia e, por conseguinte, deduz-se formalmente. Agora aplique-se *Modus Ponens*. O recíproco é imediato. $\square$

Abrimos aqui um parêntesis pois podemos terminar agora uma nossa discussão pendente sobre o programa de Hilbert. Suponhamos que uma teoria aritmética (infinitista) T é dada por uma axiomática decidível (melhor, recursiva primitiva) A. Neste caso, a relação entre uma fórmula ϕ e uma sequência de fórmulas fechadas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ que vale exatamente quando esta sequência é uma dedução formal de ϕ a partir de A é, claramente, uma relação decidível. Pela tese de Church, a relação binária R definida por

$R(m, k)$ se, e somente se, k é o número de Gödel duma dedução formal
a partir de A da fórmula cujo número de Gödel é m;

é uma relação recursiva. De facto, até se mostra (sem grande dificuldade) que esta relação R é recursiva primitiva. A consistência de T pode então formular-se por meio da expressão real esquemática $\neg R(\#(\overline{0} = \overline{1}), \mathfrak{a})$. Como já discutimos, o programa fundacional de Hilbert assenta na necessidade duma justificação finitista desta asserção de consistência.

Apesar de toda a sua originalidade, o programa de Hilbert estava condenado desde o seu início – como Gödel veio a mostrar com o segundo teorema da Incompletude. Hoje compreende-se que o programa se ancorava em ideias *erradas* sobre a relação entre verdade e dedução formal. Sem embargo, a disciplina que Hilbert fundou – a Teoria da Demonstração (*Beweistheorie*) ou Metamatemática – para providenciar demonstrações finitistas de consistência sobreviveu ao colapso do programa de Hilbert e constitui, hoje, uma disciplina da Lógica Matemática. Os seus métodos têm tido grande aplicação em Ciência da Computação.

O segundo teorema da incompletude de Gödel diz que, sob condições muito gerais, a formalização da expressão real esquemática da consistência da teoria infinitista T na linguagem de T não se deduz formalmente a partir da própria teoria T. Assim, se se supuser que os métodos finitistas estão todos disponíveis em T, conclui-se que a asserção de consistência não é finitisticamente justificável. Aliás, nem sequer é justificável com a ajuda dos métodos *infinitistas* disponíveis em T. O resultado de Gödel deixa, no entanto, aberta a possibilidade de que a consistência de T seja formalmente demonstrável em teorias *diferentes* de T. Por exemplo, a axiomática de Zermelo-Fraenkel ZF demonstra a consistência de PA. Naturalmente, isso faz-se exibindo o modelo *standard* $\mathbb{N}$. Mais rigorosamente, em ZF – como sabemos – pode definir-se o predicado de satisfazibilidade respeitante à estrutura $\mathbb{N}$ e demonstrar, por indução no comprimento da dedução formal de PA, a verdade do fecho universal de cada fórmula duma sequência dedutiva. Em particular, essa sequência dedutiva não pode terminar na fórmula "0=1" já que esta fórmula é falsa na estrutura *standard*. Note-se que este argumento é infinitista pois o predicado de verdade aritmética nem sequer é aritmeticamente definível tratando-se, muito menos, dum predicado esquemático real.

Depois deste interlúdio, podemos voltar ao desenvolvimento da teoria. Um conjunto de fórmulas fechadas diz-se *maximalmente consistente* se é consistente e não está propriamente contido em nenhum conjunto consistente.

Teorema de Lindenbaum. *Toda a teoria consistente está incluída numa teoria maximalmente consistente.*

Demonstração. Dada uma teoria consistente T considera-se o conjunto de todas as teorias consistentes que incluem T ordenado pela relação de inclusão. Trata-se duma ordem parcial que está nas condições de aplicação do lema de Zorn (note que um conjunto de sentenças fechadas é consistente se, e somente se, toda a sua parte finita é consistente). É óbvio que um conjunto maximalmente consistente de fórmulas fechadas é uma teoria. $\square$

Corolário 1. *Toda a teoria consistente está contida numa teoria consistente* T *que é completa no sentido dedutivo, i.e., tal que, para qualquer fórmula fechada* ϕ*, ou* $\mathsf{T} \vdash \phi$ *ou* $\mathsf{T} \vdash \neg\phi$*.*

Demonstração. Pelo teorema de Lindenbaum, basta verificar que toda a teoria maximalmente consistente é completa. Seja ϕ uma fórmula fechada e admitamos que $\mathsf{T} \nvdash \phi$. Como sabemos, tem-se que $\mathsf{T} \cup \{\neg\phi\}$ é consistente. Por maximalidade, $\neg\phi \in \mathsf{T}$. Logo, $\mathsf{T} \vdash \neg\phi$. $\square$