O MÉTODO DAS CONSTANTES DE HENKIN

FERNANDO FERREIRA

Teorema da Completude de Gödel (versão dedutiva). *Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas e ϕ uma fórmula fechada duma dada linguagem do cálculo de predicados. Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.*

O teorema da completude acima segue-se do seguinte resultado:

Teorema da Existência de Modelos. *Se um conjunto de fórmulas fechadas é consistente então tem um modelo.*

Com efeito, suponhamos que $\Gamma \models \phi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não tem modelos. Pelo teorema acima, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é consistente. Como vimos, isto implica que $\Gamma \vdash \phi$.

Tem-se um resultado análogo de completude para o cálculo de predicados *com igualdade* (em que a semântica é dada por estruturas normais) *desde* que nos axiomas lógicos também se incluam os axiomas da igualdade IG. Para verificar este resultado, suponhamos que ϕ não se obtém de Γ por meio duma dedução formal com os axiomas da igualdade. Pelo teorema da completude acima, $\Gamma \cup IG \cup \{\neg\phi\}$ tem um modelo (não necessariamente normal). Como sabemos, então existe um modelo *normal* de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$.

O teorema da existência de modelos permite demonstrar facilmente o teorema da compacidade do cálculo de predicados. Suponhamos que Γ é um conjunto de fórmulas fechadas finitamente satisfazível. Então, Γ é finitamente consistente (i.e., todo o subconjunto finito de Γ é consistente). Obviamente, sai que Γ é consistente visto que as deduções formais apenas usam um número finito de fórmulas. Pelo teorema da existência de modelos, Γ tem um modelo.

Definição 1. *Seja T um conjunto de sentenças duma dada linguagem $\mathcal{L}$ e C um conjunto de constantes de $\mathcal{L}$. Diz-se que C é um* conjunto de testemunhas *para T em $\mathcal{L}$ se, para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ com exatamente uma variável livre x, existe uma constante c de C tal que $T \vdash \exists x\phi \to \phi^x_c$.*

Com a ajuda do próximo lema, vamos demonstrar o teorema da existência de modelos. Nesta demonstração vamos usar indução e recursão transfinita. O leitor não familiarizado com estas noções da teoria dos conjuntos pode restringir-se ao caso em que a linguagem é numerável. Neste caso, apenas se usa indução e recursão finita.

Lema 1. *Seja T um conjunto consistente de sentenças duma dada linguagem $\mathcal{L}$. Seja C um conjunto de constantes novas com a cardinalidade da linguagem $\mathcal{L}$ e tome-se $\mathcal{L}_C$ a linguagem $\mathcal{L}$ juntamente com as novas constantes de C. Então há uma extensão consistente T_C de T, constituída por sentenças de $\mathcal{L}_C$, de tal modo que C é um conjunto de testemunhas para T_C em $\mathcal{L}_C$.*

Demonstração. Seja κ a cardinalidade de $\mathcal{L}$ e seja $(c_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ uma enumeração (transfinita) injetiva de novas constantes. Vamos tomar $C := \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$. É claro que a cardinalidade da linguagem alargada $\mathcal{L}_C$ ainda é κ. Tome-se $(\phi_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ uma enumeração transfinita de todas as fórmulas de $\mathcal{L}_C$ com exatamente uma variável livre x_α. Vamos definir, por recursão transfinita, uma κ-sequência de conjuntos de fórmulas fechadas de $\mathcal{L}_C$:

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_\alpha \subseteq \ldots$$

e uma sequência transfinita de constantes $(d_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de C, de tal modo que:

(i) T_0 é T e cada T_α é consistente;
(ii) em cada T_α ocorrem menos de κ novas constantes de C;
(iii) se $\alpha = \beta + 1$, então $T_\alpha = T_\beta \cup \{\exists x_\beta \phi_\beta \to (\phi_\beta)^{x_\beta}_{d_\beta}\}$;
(iv) se α é um ordinal limite, $T_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$.

Suponhamos que T_β já está definido e goza das propriedades acima. Tome-se d_β o primeiro elemento de C que não ocorre nem em ϕ_β nem em nenhuma fórmula de T_β. Vamos mostrar que o conjunto $T_\beta \cup \{\exists x_\beta \phi_\beta \to (\phi_\beta)^{x_\beta}_{d_\beta}\}$ é consistente. Se não fosse, então $T_\beta \vdash \neg(\exists x_\beta \phi_\beta \to (\phi_\beta)^{x_\beta}_{d_\beta})$. Daqui sai, pelo cálculo proposicional, $T_\beta \vdash \exists x_\beta \phi_\beta$ e $T_\beta \vdash \neg(\phi_\beta)^{x_\beta}_{d_\beta}$. Dado que d_β não ocorre em T_β, uma dedução formal de $\neg(\phi_\beta)^{x_\beta}_{d_\beta}$ a partir de T_β dá obviamente origem a uma dedução formal de $\neg\phi_\beta$ a partir de T_β (substitui-se sistematicamente na dedução original a constante d_β pela variável x_β). Assim, dado que $T_\beta \vdash \neg\phi_\beta$, por generalização, obtém-se $T_\beta \vdash \forall x_\beta \neg\phi_\beta$ e, portanto, $T_\beta \vdash \neg\exists x_\beta \phi_\beta$. Isto contradiz a consistência de T_β.

Este argumento mostra que se pode definir uma sequência transfinita de conjuntos de fórmulas fechadas que goza das propriedades (i), (ii), (iii) e (iv). Toma-se T_C como a união $\bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$. É claro que T_C é consistente e contém T. Resta ver que C é um conjunto de testemunhas para T_C em $\mathcal{L}_C$. Seja ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}_C$ com exatamente uma variável livre x. Então, ϕ é ϕ_α para algum $\alpha < \kappa$ e x é a variável x_α. Logo a fórmula $\exists x_\alpha \phi_\alpha \to (\phi_\alpha)^{x_\alpha}_{d_\alpha}$, i.e., $\exists x \phi \to \phi^x_{d_\alpha}$, está em $T_{\alpha+1}$ e, portanto, em T. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema da existência de modelos. Seja T um conjunto consistente de fórmulas fechadas. Pelo lema anterior, tome-se T_C uma extensão consistente de T numa linguagem alargada $\mathcal{L}_C$ por novas constantes C, de tal modo que C seja um conjunto de testemunhas para T_C em $\mathcal{L}_C$. Pelo teorema de Lindenbaum, seja $\tilde{T}$ uma extensão consistente e completa (no sentido dedutivo) de T_C. É claro que C ainda é um conjunto de testemunhas para $\tilde{T}$ em $\mathcal{L}_C$. Define-se agora uma estrutura $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}_C$. O domínio $|\mathfrak{M}|$ da estrutura é constituído pelos termos fechados de $\mathcal{L}_C$. Para uma constante a de $\mathcal{L}_C$, define-se $a^{\mathfrak{M}}$ como sendo a. Para um símbolo funcional de aridade $n > 0$, define-se $f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n)$ como sendo o termo fechado $f(t_1, \ldots, t_n)$. É fácil de ver (por indução na complexidade dos termos) que, para cada termo fechado t de $\mathcal{L}_C$, $t^{\mathfrak{M}} = t$. Para um símbolo relacional R de aridade n de $\mathcal{L}_C$, define-se $R^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, a fórmula $R(t_1, \ldots, t_n)$ está em $\tilde{T}$. É claro que $\models_{\mathfrak{M}} R(t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, $R(t_1, \ldots, t_n)$ está em $\tilde{T}$. Esta equivalência constitui a base de indução para uma demonstração, por indução na complexidade das fórmulas fechadas ϕ de $\mathcal{L}_C$, de que se tem

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi \quad \text{se, e somente se,} \quad \tilde{T} \vdash \phi.$$

Note-se que, dada a inclusão $T \subseteq \tilde{T}$, esta equivalência implica imediatamente que $\mathfrak{M}$ é modelo de T, como se deseja. O caso base já foi discutido. Basta discutir, p. ex., os casos da negação, da conjunção e da quantificação existencial. O caso da negação advém do facto de $\tilde{T}$ ser consistente e completa. Com efeito:

$$\models_{\mathfrak{M}} \neg\phi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models_{\mathfrak{M}} \phi \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{T} \nvdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{T} \vdash \neg\phi$$

O caso da conjunção não põe problemas. Resta ver o caso da quantificação existencial. Suponhamos que $\models_{\mathfrak{M}} \exists x \phi$. Então existe um termo fechado t de $\mathcal{L}_C$ tal que $\models_{\mathfrak{M}} \phi\,[t]$. Daqui sai que $\models_{\mathfrak{M}} \phi^x_t$. Por hipótese de indução, tem-se $\tilde{T} \vdash \phi^x_t$. Logo, $\tilde{T} \vdash \exists x \phi$. Reciprocamente, suponhamos que $\tilde{T} \vdash \exists x \phi$. Se x ocorre livre em ϕ então, visto que C é um conjunto de testemunhas para $\tilde{T}$ em $\mathcal{L}_C$, há uma constante c de $\mathcal{L}_C$ tal que $\tilde{T} \vdash \exists x \phi \to \phi^x_c$. Por *modus ponens*, tem-se $\tilde{T} \vdash \phi^x_c$. Logo, por hipótese de indução, vem $\models_{\mathfrak{M}} \phi^x_c$. Logo $\models_{\mathfrak{M}} \phi[c]$ e, portanto, $\models_{\mathfrak{M}} \exists x \phi$. Caso x não ocorra livre em ϕ, use-se simplesmente o facto de que, neste caso, $\vdash \exists x \phi \to \phi$ e, novamente, *modus ponens* e a hipótese de indução.

Demonstrámos, pois, o teorema da existência de modelos.

A versão dedutiva do teorema da completude de Gödel permite concluir a existência de deduções formais através de argumentos de natureza semântica. Com efeito, para mostrar que $\Gamma \vdash \phi$ basta argumentar que ϕ é verdadeira em todo o modelo de Γ. Considere-se, por exemplo, o esquema (2') formado pelos fechos universais de $\forall x \forall y(x = y \wedge \phi \to \phi')$, onde ϕ é uma fórmula *qualquer*, y está livre para x em ϕ e ϕ' obtém-se de ϕ substituindo uma ou mais ocorrências livres da variável x pela variável y. Dado que as fórmulas deste esquema são verdadeiras em todas as estruturas que satisfaçam os axiomas de igualdade IG (recorde-se que estes axiomas estão *apenas* enunciados para fórmulas sem quantificadores ϕ), sabemos que as fórmulas de (2') admitem deduções formais no cálculo de predicados com igualdade. (De facto, não é difícil argumentar este facto diretamente, por indução na complexidade das fórmulas ϕ.) Trata-se de uma forma *indireta* de mostrar que existem certas deduções formais (o argumento não é construtivo, na medida em que não se mostra como obtê-las explicitamente). Esta forma indireta é frequentemente usada em lógica matemática. Quando se quer argumentar que existe uma dedução formal de ϕ a partir de Γ por esta via semântica, é costume começar o argumento com as palavras "raciocinemos em Γ", com vista a mostrar que ϕ é verdadeira em todo o modelo de Γ. Deve realmente ter-se o cuidado de assegurar que o nosso raciocínio se aplica, efetivamente, a todo e qualquer modelo de Γ. O principiante é, por vezes, levado ao engano por deixar de fora certos modelos (por estes não serem "naturais"). Neste texto, evitaremos usar o método semântico para justificar a obtenção de deduções formais.

Nas próximas secções admitimos a existência de certas deduções formais. A sua existência direta é geralmente simples de argumentar (usando tautologias e o teorema da dedução). A título de exemplo, vamos argumentar que se tem $\vdash (\forall x(\theta(x) \to x = t) \wedge \exists x(\theta(x) \wedge \psi(x))) \to \psi(t)$, onde t é um termo fechado e θ tem como única variável livre x (e, é claro, a dedução é no cálculo de predicados com igualdade). Este facto vai ser usado pelo menos duas vezes nas próximas secções. Ora, dado que

$$(\theta(x) \to x = t) \to [(x = t \wedge \psi(x) \to \psi(t)) \to (\theta(x) \wedge \psi(x) \to \psi(t))]$$

é uma tautologia, vem por (2'), $\{\forall x\,(\theta(x) \to x = t)\} \vdash \theta(x) \wedge \psi(x) \to \psi(t)$. Como sabemos, daqui sai $\{\forall x\,(\theta(x) \to x = t)\} \vdash \exists x(\theta(x) \wedge \psi(x)) \to \psi(t)$. Agora utiliza-se o teorema da dedução e uma tautologia apropriada.

Há mais uma observação que é oportuno fazer sobre a versão dedutiva do teorema da completude de Gödel. Esta versão tem, como óbvia consequência, a versão recursiva do teorema da completude. Com efeito, seja T é uma teoria recursivamente axiomatizável com axiomática A. Considere-se o predicado binário R que é verdadeiro do par (m, k) se, e somente se, k é o número de Gödel duma dedução formal a partir de A da fórmula cujo número de Gödel é m. Como já discutimos, R é um predicado recursivo. Logo, m é o número de Gödel dum elemento de T se, e somente se, $\exists k\, R(m, k)$. Como é patente, os números de Gödel dos elementos de T formam um conjunto recursivamente enumerável.