Exame de *Introdução à Teoria dos Conjuntos* (3 horas)

Fernando Ferreira

19 de Janeiro de 2012

1. (a) Diga o que é uma boa-ordem.
   (b) Dê um exemplo duma ordem total estrita com mínimo e que não seja uma boa-ordem.
   (c) Mostre que todo o subconjunto finito, não vazio, duma ordem total estrita tem elemento mínimo. [Sugestão: por indução no número de elementos do conjunto.]
   (d) Dê um exemplo duma boa-ordem com exactamente dois elementos limite. Aponte esses elementos. (Não necessita de justificar.)

2. Defina em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma relação de equivalência e, no conjunto cociente, operações de soma e produto de modo a que se obtenha a estrutura $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Neste exercício, verifica que a relação que define é uma relação de equivalência, que a operação de soma está bem definida (não é necessário fazê-lo para o produto), que a soma é comutativa e que todo o elemento tem simétrico.

3. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de cortes de Dedekind (elementos de $\mathbb{R}^+$). Suponha que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X_n\, (x \leq q)$.

   (a) Mostre que $\bigcup_n X_n$ é um corte de Dedekind.
   (b) Mostre que $\bigcup_n X_n = \sup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. (a) Mostre, em aritmética cardinal, que para todo o cardinal infinito κ, $2^\kappa = \kappa^\kappa$.
   (b) Mostre que o produto *cartesiano* de ordinais $\prod_{1<\alpha<\omega_1} \alpha$ tem cardinalidade $2^{\aleph_1}$.

5. Explique o que é o paradoxo de Russell. A teoria ZFC evita este paradoxo porque restringe o princípio da compreensão ao axioma da separação. Enuncie este axioma.

6. (a) Ordene, do mais pequeno ao maior, os seguintes ordinais: ω_1, ω^2, $\omega + \omega$, $1 + \omega$, $\omega \cdot 2$, $\omega + 1$, $\omega + \omega_1$, ω^ω, $\omega + \omega^2$, $\omega_1 + 1$ e $3 \cdot \omega$. Não necessita de justificar. (Todas as operações são operações da aritmética ordinal.)
   (b) O conjunto $\{n - \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\}$ munido da ordem induzida pela ordem natural de $\mathbb{Q}$ é uma boa-ordem (aceite este facto). Ora, como sabe, toda a boa-ordem é isomorfa a um único ordinal. Qual é o ordinal que é isomorfo a esta boa-ordem? (Não necessita de justificar.)

7. Seja $(X, <)$ uma ordem total estrita. Diz-se que $C \subseteq X$ é cofinal em X se, para todo $x \in X$, existe $c \in C$ tal que $x \leq c$. Mostre que X tem um subconjunto cofinal que é bem-ordenado para a ordem induzida. [Sugestão: obtenha o conjunto em causa através duma recursão na classe dos ordinais.]

8. (a) Defina adição ordinal.
   (b) Mostre a propriedade associativa da adição ordinal.