Exame de *Introdução à Teoria dos Conjuntos* (3 horas)

Fernando Ferreira (18/7/12)

1. (a) Defina corte de Dedekind em $\mathbb{Q}^+$.

   (b) Mostre que se $X \in \mathbb{R}^+$ (i.e., se X é um corte de Dedekind) então $1_{\mathbb{R}^+} \cdot X = X$. [Sugestão: para mostrar que $X \subseteq 1_{\mathbb{R}^+} \cdot X$ use o facto de que X não tem elemento máximo.]

2. (a) Construa, através dum conjunto cociente apropriado e correspondente relação de equivalência, o conjunto dos números reais a partir dos números reais positivos.

   (b) Usando a construção anterior, defina *cuidadosamente* a operação de adição nos reais a partir da aritmética dos reais positivos.

   (c) À luz das alíneas anteriores, mostre que todo o número real tem simétrico.

3. (a) Mostre que o conjunto de todas as funções de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

   (b) Mostre que o conjunto de todas as funções *contínuas* de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ também tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$. [Sugestão: considere a aplicação que a cada função contínua de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ faz corresponder a sua restrição a $\mathbb{Q}$.]

   (c) Será que o conjunto de *todas* as funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ também tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$? Justifique.

4. Mostre, em aritmética cardinal, que $\kappa^{\rho+\mu} = \kappa^\rho \cdot \kappa^\mu$.

5. (a) Diga o que é uma boa-ordem. Exiba uma ordem total que não é uma boa-ordem.

   (b) Seja $(X, <)$ uma boa-ordem. Um segmento inicial de X é um subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\forall x, y \in X\, (y \in Y \wedge x < y \rightarrow x \in Y)$. Mostre que se $Y \neq X$ então existe $x_0 \in X$ tal que $Y = \{y \in X : y < x_0\}$.

6. Uma ordem total $(X, <)$ diz-se uma *dupla* boa-ordem se todo o subconjunto não vazio de X tem mínimo e tem máximo. Mostre que toda a dupla boa-ordem é finita.

7. Define-se, por recursão finita, a seguinte função: $V_0 = \emptyset$ e $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$.

   (a) Calcule V_1 e V_2.

   (b) Mostre que, para todo $n \in \omega$, V_n é um conjunto transitivo.

   (c) Mostre que, para todo $n \in \omega$, $n \in V_{n+1}$.

   (d) Por outro lado mostre que, para todo $n \in \omega$, $n \notin V_n$.

8. Dê um exemplo duma sucessão crescente de ordinais $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e de um ordinal β tal que $(\sup_n \alpha_n) + \beta \neq \sup_n(\alpha_n + \beta)$.

9. Mostre a propriedade associativa da adição ordinal.