Exame de *Introdução à Teoria dos Conjuntos* (3 horas)

Fernando Ferreira

26 de Janeiro de 2011

1. Sejam A e B conjuntos e $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto A$ aplicações tais que $f \circ g = id_B$.

   (a) Mostre que f é uma aplicação sobrejectiva e que g é uma aplicação injectiva.

   (b) Será que se pode mostrar que f e g são bijecções? Justifique.

2. (a) Seja X um corte de Dedekind e fixe-se $k \in \mathbb{N}^+$. Mostre que $S := \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{k} \notin X\}$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$.

   (b) Seja X um corte de Dedekind e considere $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$. Mostre que existem números racionais q e r tais que $q \in X$, $r \notin X$ e $r - q \leq \varepsilon$.

3. Sejam κ, λ e ρ cardinais.

   (a) Mostre em aritmética cardinal que $\kappa(\lambda + \rho) = \kappa\lambda + \kappa\rho$.

   (b) Diga, justificando, se a seguinte propriedade é em geral válida para cardinais infinitos:

$$\kappa \cdot \rho = \lambda \cdot \rho \to \kappa = \lambda$$

4. (a) Mostre que $X \subseteq Y \to \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

   (b) Mostre em Z que o conjunto $\{\mathcal{P}(X) : X \subseteq \mathbb{N}\}$ existe.

   (c) Mostre que a classe de todos os conjuntos não vazios é uma classe própria.

5. (a) Diga o que é uma boa-ordem.

   (b) Será que o intervalo de todos os racionais positivos entre 1 e 2 (inclusive os extremos) munido da ordem usual é uma boa-ordem? Justifique.

6. Mostre que se x é um ordinal, então $x \cup \{x\}$ é um ordinal.

7. Uma função $F : \mathscr{P}(\omega) \to \mathscr{P}(\omega)$ diz-se *monótona* se, para todos $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, se $X \subseteq Y$ então $F(X) \subseteq F(Y)$. Defina-se, por recursão transfinita em ω_1, a seguinte função:

$$I_\alpha = F(\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta)$$

   (a) Mostre que $I_2 = F(F(F(\emptyset)))$.

   (b) Seja dado $\alpha < \omega_1$ e suponha que $I_\beta \subseteq F(I_\beta)$ para todo $\beta < \alpha$. Mostre que $\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta \subseteq I_\alpha$.

   (c) Mostre, por indução transfinita, que $I_\alpha \subseteq F(I_\alpha)$ para todo $\alpha < \omega_1$.

   (d) Mostre que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $I_\alpha = F(I_\alpha)$.

8. Mostre a propriedade associativa da adição ordinal.