Exame de *Introdução à Teoria dos Conjuntos* (3 horas)

Fernando Ferreira

13 de Janeiro de 2011

1. Sejam A e B conjuntos e $f : A \mapsto B$ uma função injectiva.
   (a) Dados $X, Y \subseteq A$, mostre que $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.
   (b) Será que a propriedade da alínea anterior ainda é válida se f não for injectiva? Justifique.
2. (a) Defina corte de Dedekind em $\mathbb{Q}^+$.
   (b) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathbb{Q}^+$ estritamente crescente e limitada. Mostre que $K := \{q \in \mathbb{Q}^+ : \exists k \in \mathbb{N}\,(q \leq a_k)\}$ é um corte de Dedekind.
   (c) Considere-se, também, uma sucessão de elementos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}^+$ tal que $b_n - a_n \to 0$. Dado X um corte de Dedekind tal que $K < X$, mostre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \in X$.
3. Sejam κ e ρ cardinais infinitos tais que $\kappa \leq \rho$. Mostre (em aritmética cardinal) que $\kappa^\rho = 2^\rho$.
4. Considere em $\mathbb{R}$ a seguinte relação binária: xSy se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$.
   (a) Mostre que S é uma relação de equivalência.
   (b) Dado $x \in \mathbb{R}$, mostre que $[x]_S = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$.
   (c) Mostre que cada elemento de $\mathbb{R}/S$ é numerável.
   (d) Mostre que $\mathbb{R}/S$ tem a cardinalidade do contínuo.
5. Seja $(X, <)$ uma boa-ordem. Dado $Y \subseteq X$, mostre que Y com a ordem induzida ainda é uma boa-ordem,
6. (a) Seja f uma função. Mostre que $\mathrm{im} f$ é um conjunto.
   (b) Considere-se a operação $x \rightsquigarrow \{x\}$. Mostre que a imagem desta operação é uma classe própria.
7. (a) Defina o conjunto ω.
   (b) Mostre que ω é um conjunto transitivo.
   (c) Dada uma função $f : \omega \mapsto \omega_1$, mostre que existe um ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que, para todo $n \in \omega$, $f(n) \leq \alpha$.
8. Mostre a propriedade associativa da adição ordinal.