Resolução do exame do dia 13 de Janeiro de 2011

Fernando Ferreira

1. (a) Claro que $f[X \cap Y] \subseteq f[X]$ e $f[X \cap Y] \subseteq f[Y]$, donde $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$. Reciprocamente, tome-se $w \in f[X] \cap f[Y]$. Então existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $w = f(x)$ e $w = f(y)$. Dado que f é injectiva, sai que $x = y$. Logo, $x \in X \cap Y$. Sai $w \in f[X \cap Y]$.

   (b) Não. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ e tome-se $X = \{-1\}$ e $Y = \{1\}$. Vem $f[X] \cap f[Y] = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ e $f[X \cap Y] = f[\emptyset] = \emptyset$.

2. (a) Um corte de Dedekind é um segmento inicial de $\mathbb{Q}^+$ não vazio, majorado e sem máximo.

   (b) É claro que $a_n \in K$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Em particular, sai que $K \neq \emptyset$. Suponhamos que $q \in K$ e $q' < q$. Por definição de K, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $q \leq a_k$. Vem, $q' \leq a_k$ e, portanto, $q' \in K$. Mostrámos que K é segmento inicial. Por hipótese, existe $l \in \mathbb{Q}^+$ tal que $a_n \leq l$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que l é majorante de K: dado $q \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $q \leq a_n$; logo, $q \leq l$. Resta ver que K não tem máximo. Seja $q \in K$ ao arbítrio. Tome-se $k \in \mathbb{N}$ tal que $q \leq a_k$. Tem-se, $q \leq a_k < a_{k+1}$. Como $a_{k+1} \in K$, vem que q não é máximo de K.

   (c) Dizer que $K < X$ é dizer que K é subconjunto próprio de X. Tome-se $x \in X \setminus K$. Como X não tem máximo (é corte de Dedekind), seja $x' \in X$ tal que $x < x'$. Visto que $b_n - a_n \to 0$ e $x' - x > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k - a_k \leq x' - x$. Note-se que $a_k \leq x$ (a alternativa, $x < a_k$, implicaria – dado que K é segmento inicial – que $x \in K$, o que não é o caso). Vem $b_k \leq a_k + x' - x \leq x + x' - x = x'$. Como X é segmento inicial, sai $b_k \in X$.

3. $2^\rho \leq \kappa^\rho \leq (2^\kappa)^\rho = 2^{\kappa\rho} = 2^\rho$. A última igualdade usa a lei da absorção [AC]. A igualdade desejada sai pelo teorema de Cantor-Schröder-Bernstein.

4. (a) A reflexividade sai porque 0 é um número racional. A simetria sai do facto de que o simétrico dum número racional é um número racional. A transitividade sai do facto de que a soma de dois números racionais é um número racional.

   (b) Fixe-se $x \in \mathbb{R}$. Tome-se $w \in [x]_S$. Então wSx, i.e., $w - x \in \mathbb{Q}$. Ora $w = x + (w - x)$. Reciprocamente, seja $q \in \mathbb{Q}$. Vem $(x + q) - x = q \in \mathbb{Q}$. Logo, $(x + q)Sx$ e, portanto, $x + q \in [x]_S$.

   (c) Seja $C \in \mathbb{R}/S$. Pela alínea anterior, $C = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ para certo $x \in \mathbb{R}$. A aplicação de $q \rightsquigarrow x + q$ de $\mathbb{Q}$ para C é claramente bijectiva. Logo, $C =_c \mathbb{Q}$ e, portanto, C é numerável.

   (d) [Este exercício pode fazer-se muito facilmente usando o material do capítulo 15 dos apontamentos. Este material não foi dado no ano letivo de 2010/2011, mas foi dado no presente ano letivo. A solução de seguida não usa o capítulo 15 e, por isso, é um pouco elaborada.]

   Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de representantes para a partição $\mathbb{R}/S$ [AC]. Note-se que $X =_c R/S$. Considere-se a seguinte função:

$$\Phi : X \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$$
$$(x, q) \rightsquigarrow x + q$$

Vamos argumentar que Φ é uma bijecção. Suponhamos que $\Phi(x, q) = \Phi(x', q')$, i.e., $x + q = x' + q'$. Daqui sai xSx'. Logo, como X é um conjunto de representantes, $x = x'$. Agora também se conclui $q = q'$. Tome-se, agora, $z \in \mathbb{R}$. Como X é conjunto de representantes, existe $x_0 \in X$ tal que zSx_0. Sai $z = x_0 + q_0$ para certo $q_0 \in \mathbb{Q}$. Logo, $\Phi(x_0, q_0) = z$.

Denote-se por κ a cardinalidade de $\mathbb{R}/S$. Pela bijecção Φ, sabemos que $\kappa \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$. Pela lei da absorção [AC], $\kappa \cdot \aleph_0 = \max\{\kappa, \aleph_0\}$. Este máximo não pode ser $\aleph_0$ (teorema de Cantor). Vem que o máximo é κ e, portanto, $\kappa = 2^{\aleph_0}$.

5. Seja $(X, <)$ uma boa-ordem e $Y \subseteq X$. Por definição $(X, <)$ é anti-reflexiva, transitiva e tricotómica. Claramente, a ordem induzida em Y herda estas propriedades. Tome-se, agora, $Z \subseteq Y$, $Z \neq \emptyset$. Ora, $Z \subseteq X$ e, como $(X, <)$ é uma boa-ordem, existe $x \in Z$ tal que $\forall z \in Z (x \leq z)$. Claro que z é também o mínimo de Z na ordem induzida.

6. (a) A imagem de f pode obter-se por separação da seguinte maneira:

$$\text{im} f = \{y \in \bigcup\bigcup f : \exists x \ (x, y) \in f\}$$

Esta igualdade está correcta porque se $(x, y) \in f$ então $y \in \{x, y\} \in \{\{x, y\}, \{x\}\} = (x, y) \in f$ (utilizámos a definição de par ordenado de Wiener-Kuratowski). Sucessivamente, $\{x, y\} \in \bigcup f$ e, depois, $y \in \bigcup\bigcup f$.

   (b) A imagem desta operação é a classe S de todos os conjuntos singulares. Admitamos, com vista a um absurdo, que esta classe é um conjunto. Ora, pelo axioma da união, $\bigcup S$ também é um conjunto. Vamos mostrar que $\bigcup S$ é a classe universal, o que é absurdo. Com efeito, dado x um elemento do universo ao arbítrio, tem-se $x \in \{x\} \in S$ e, portanto, $x \in \bigcup S$.

7. (a) Um conjunto I diz-se indutivo se $\emptyset \in I$ e se sempre que $x \in I$ então $S(x) \in I$. Pelo axioma do infinito, existe pelo menos um conjunto infinito I_0. Por separação define-se:

$$\omega := \{x \in I_0 : \forall I \,(\text{se } I \text{ é conjunto indutivo então } x \in I)\}.$$

(Como se sabe, ω é indutivo e está contido em todos os conjuntos indutivos.)

   (b) Temos que ver que, $\forall x \in \omega \,(x \subseteq \omega)$. Basta mostrar que o conjunto $I = \{x \in \omega : x \subseteq \omega\}$ é indutivo (pois vem $\omega \subseteq I$, o que mostra o que queremos). Claro que $\emptyset \in I$. Suponhamos que $x \in I$. Então, $x \in \omega$ e $x \subseteq \omega$. Daqui sai que $x \cup \{x\} \subseteq \omega$. Conclui-se que $S(x) \in I$.

   (c) Por definição, ω_1 é o menor ordinal que não é finito nem numerável. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\forall \alpha < \omega_1 \exists n \in \omega \,(\alpha < f(n))$. Vamos mostrar que

$$\omega_1 \subseteq \bigcup_{k \in \omega} f(k)$$

Dado $\alpha \in \omega_1$, tome-se $n \in \omega$ tal que $\alpha < f(n)$, i.e., $\alpha \in f(n)$. Vem, $\alpha \in \bigcup_{k \in \omega} f(k)$. Ora, para cada $k \in \omega$, $f(k)$ é um ordinal inferior a ω_1 e, portanto, é um conjunto finito ou numerável. Como sabemos, uma união numerável de conjuntos finitos ou numeráveis é finita ou numerável. Assim, ω_1 está contido num conjunto finito ou numerável. Isto é absurdo.

8. Ver p. 58 dos apontamentos.