

Aula 12

Transformada de Fourier:
complementos

Transformada discreta de Fourier

Transformada discreta de Fourier

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n k / N}$$

*transformada discreta **inversa** de Fourier*

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i n k / N}$$

$\{f_n\}$ e $\{F_k\}$ têm o mesmo número de termos (N), e a mesma **informação!** (a menos do erro de arredondamento)

A transformada discreta (com N termos)...

Quando a função é **discretizada** (amostrada a intervalo regular) existe um período mínimo (ou **frequência máxima**) que pode ser representado. Se ela tem um número finito de termos, também existe um **período máximo** (frequência mínima, para além de 0). Logo temos uma série **discreta** e **finita** (e com erro de arredondamento).

Na prática a análise numérica de dados reais refere-se sempre a esse tipo de série. Nesse caso tanto a representação da função (transformada inversa) como o cálculo dos coeficientes (transformada) envolve **somatórios** (não integrais) com um número finito de termos.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

Linearidade

A transformada de uma combinação linear de funções é a mesma combinação linear de transformadas

$$G = \mathcal{F}(g), H = \mathcal{F}(h) \implies \mathcal{F}(ag + bh) = aG + bH$$
$$g = g(t), h = h(t); G = G(f), H = H(f)$$
$$t \equiv \text{tempo}, f \equiv \text{frequência}$$

Translação

$$S(f) = \mathcal{F}(s(t)) \implies \mathcal{F}(s(t - a)) = e^{-ifa} S(f)$$

Escalamento

$$S = \mathcal{F}(s(t)) \implies \mathcal{F}(s(at)) = \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

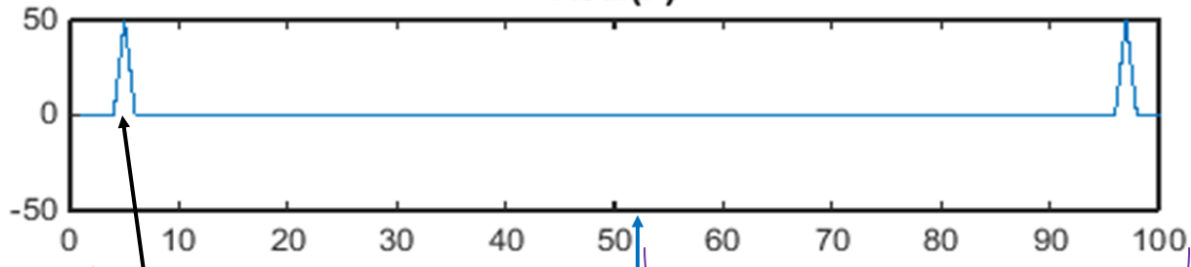
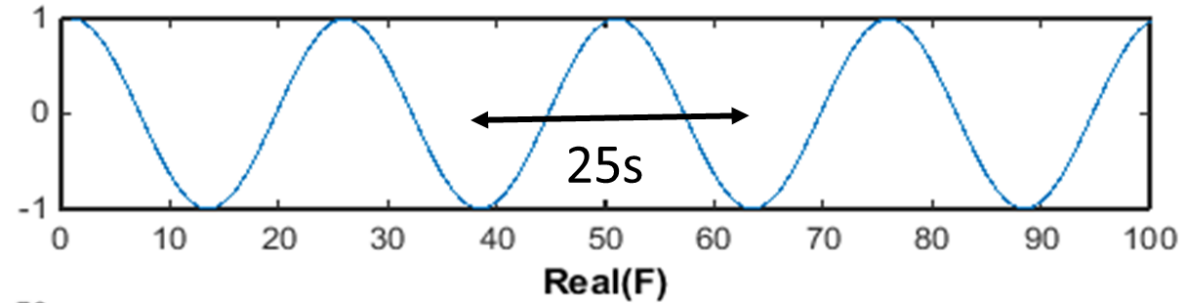
Interpretando o **espectro**: frequências

$$= \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k e^{i2\pi kt/T}$$

$$f(n) = \cos \frac{2\pi nt}{25}$$

$$n = 0 \dots N - 1$$

$$N = 100$$



$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Média (frequência=0)

$$f = \frac{5-1}{50} f_{Nyq} = \frac{1}{25} s^{-1} f = \frac{1}{2\Delta t} = f_{Nyquist}$$

Transformada discreta de Fourier

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i n k / N}$$

$\{f_n\}$ e $\{F_k\}$ têm o mesmo número de termos (N)

F_0 é proporcional à média da série

F_k, F_{-k} representam a harmónica k (frequência $\frac{f_{Nyq}k}{\frac{N}{2}}$)

indicando que existe um número **ímpar** de termos em F_k . Mas só são calculados N termos e N pode ser par. Se for esse o caso **não é calculado** o termo correspondente a $-f_{Nyq}$.

Em geral,

Tanto série $\{f_n\}$ com a sua transformada de Fourier $\{F_k\}$ são séries complexas.

Mesmo que $\{f_n\}$ seja real, $\{F_k\}$ é complexa.

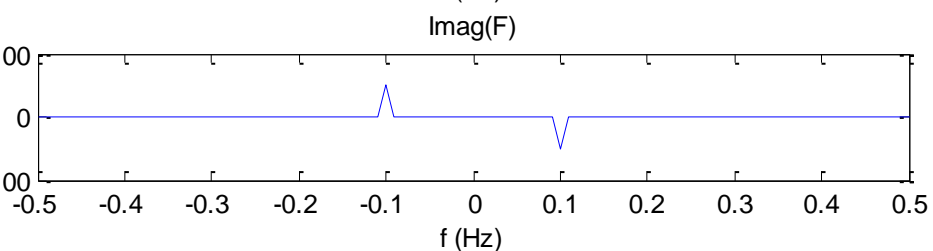
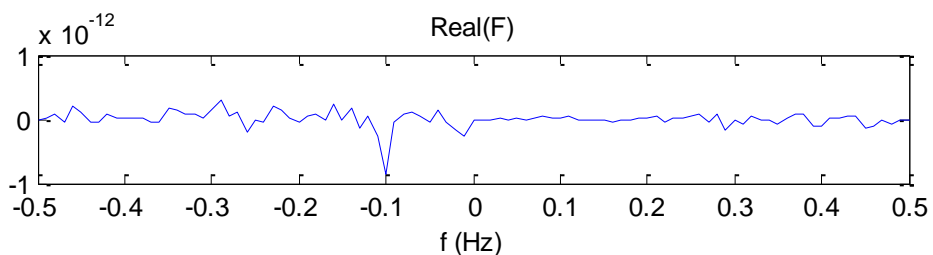
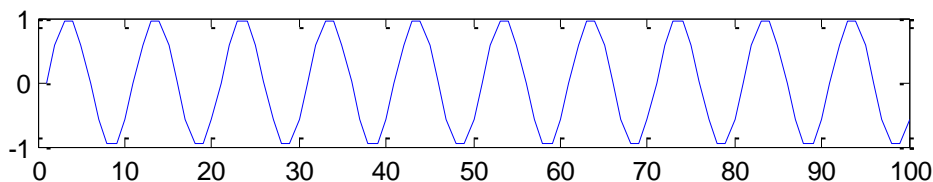
Casos especiais, se $\{f_n\}$ for real e

Par $f_n = f_{-n}$: $\{F_k\}$ é real e simétrica

Ímpar $f_n = -f_{-n}$: $\{F_k\}$ é imaginária e anti-simétrica

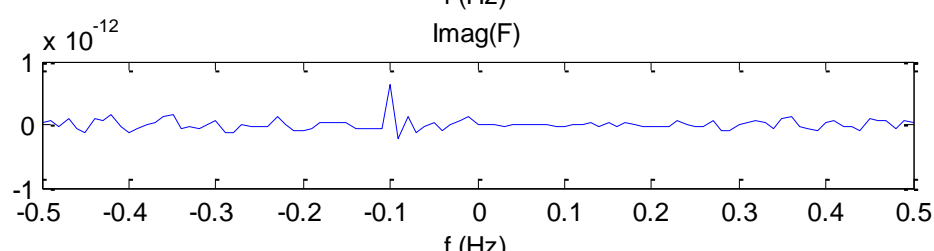
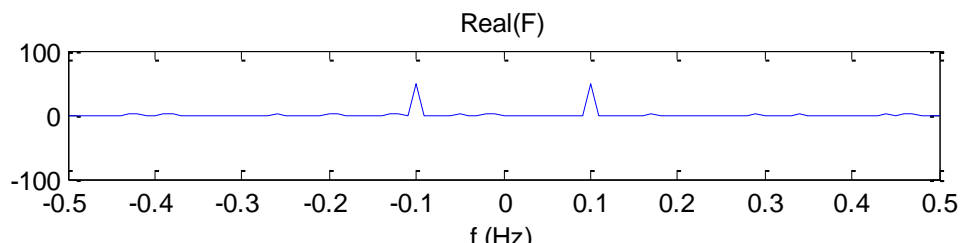
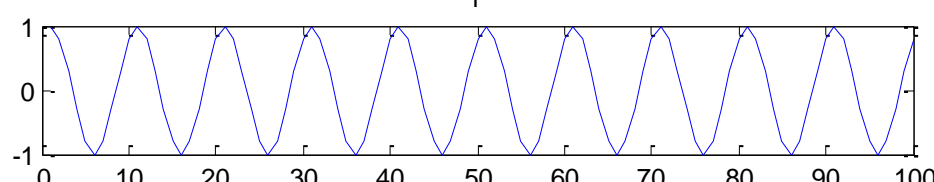
Casos especiais

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$



Transformada imaginária, anti-simétrica
($c_k = ir_k = -ir_{-k}$)

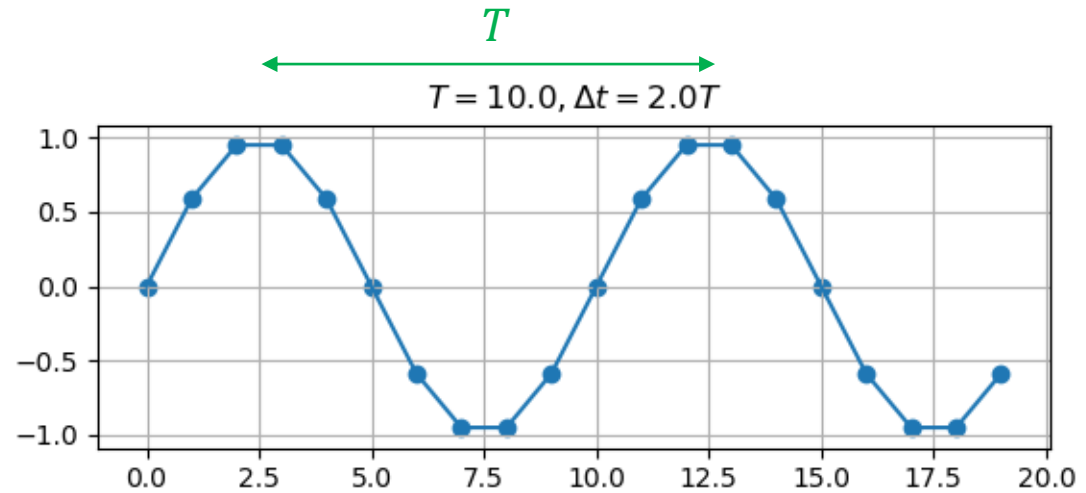
$$\cos(x) = \cos(-x)$$



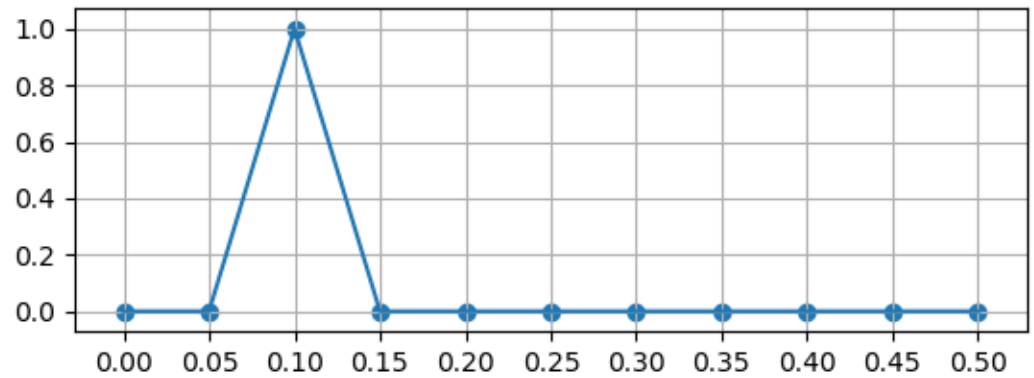
Transformada real, simétrica
($c_k = r_k = r_{-k}$)

Transformada do seno

```
A=1.;eps=1e-10; dt=1
for T in [10,20]:
    for K in[2,2.1,2.5]:
        ...
        t=np.arange(0,K*T,dt)
        n=len(t)
        f=A*np.sin(2*np.pi/T*t)
        plt.subplot(2,1,1)
        plt.plot(t,f); plt.scatter(t,f)
        plt.title(r'$T=%3.1f, \Delta t=%3.1f T$' /
                % (T,(np.max(t)+dt)/T))
        F=np.fft.fft(f)
        plt.subplot(2,1,2)
        fNyq=1/(2*dt)
        df=fNyq/(n//2)
        freq=np.arange(0,fNyq+eps,df)
        plt.plot(freq,np.abs(F[0:n//2+1])/(n//2))
        plt.scatter(freq,np.abs(F[0:n//2+1])/(n//2))
        ...
```

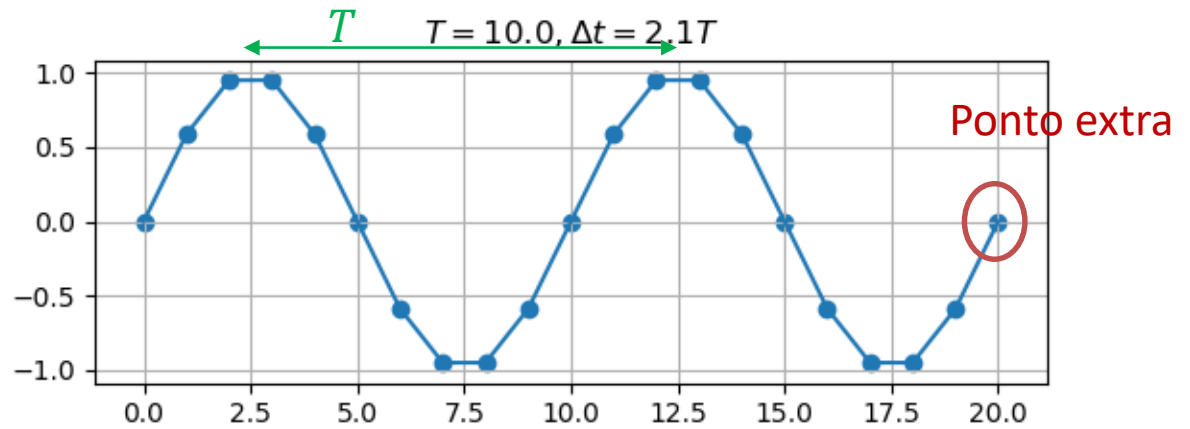


Amplitude

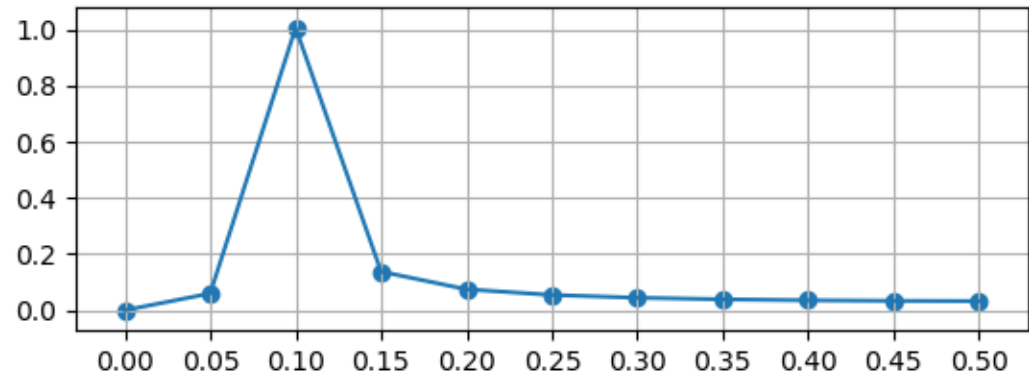


$$f = \frac{1}{T}$$

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t}$$

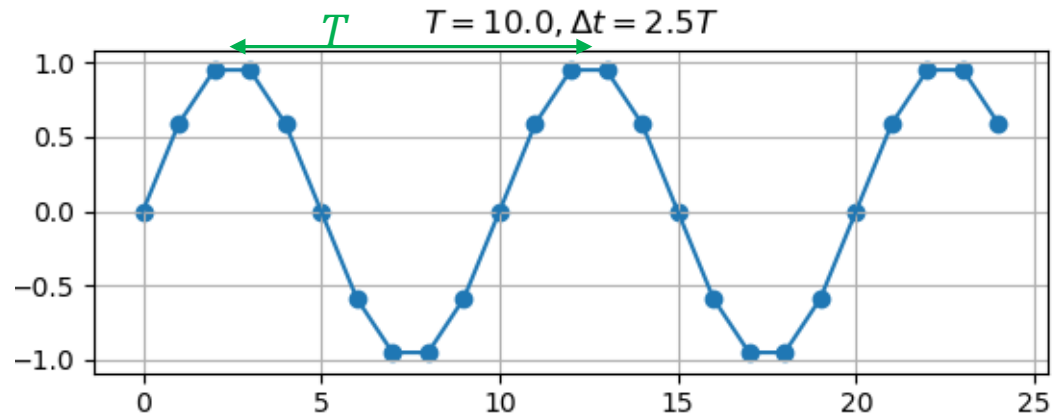


Amplitude

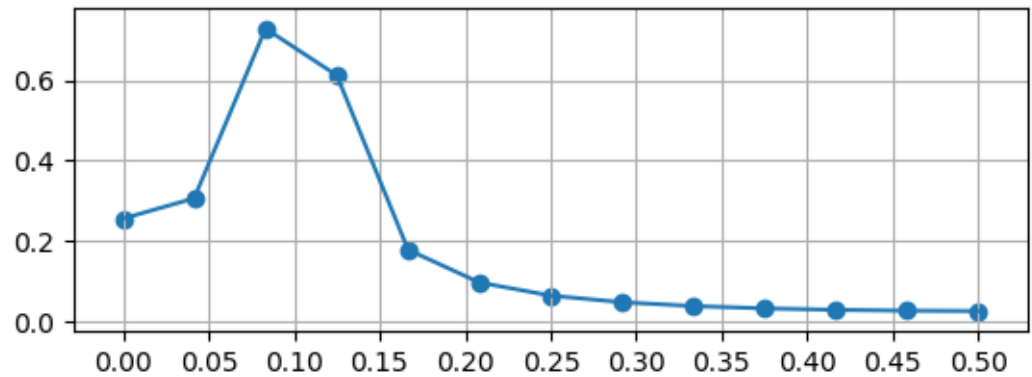


$$f = \frac{1}{T}$$

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t}$$



Amplitude



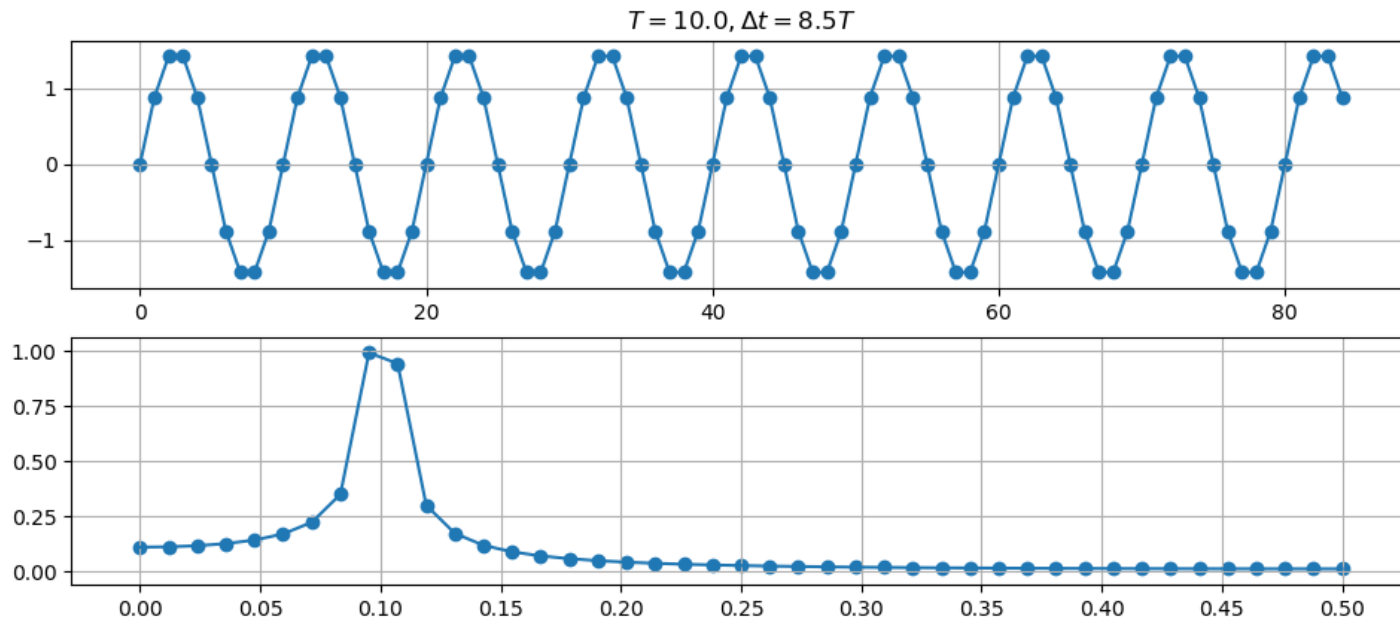
$$f = \frac{1}{T}$$

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t}$$

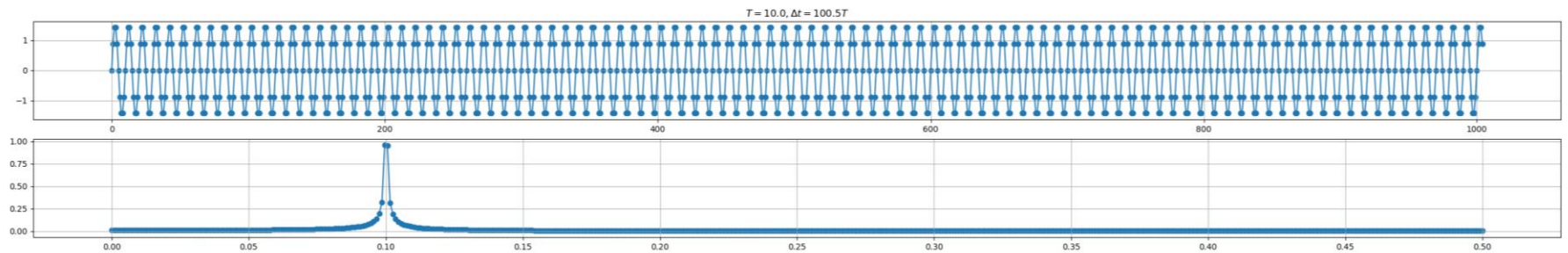
Conclusão

O resultado só é exato se os períodos presentes na série forem um submúltiplo do comprimento da série: isto é tem que existir uma **harmónica fundamental** igual ao comprimento da série. Isso **pode não ser possível** para todos os períodos existentes num série real.

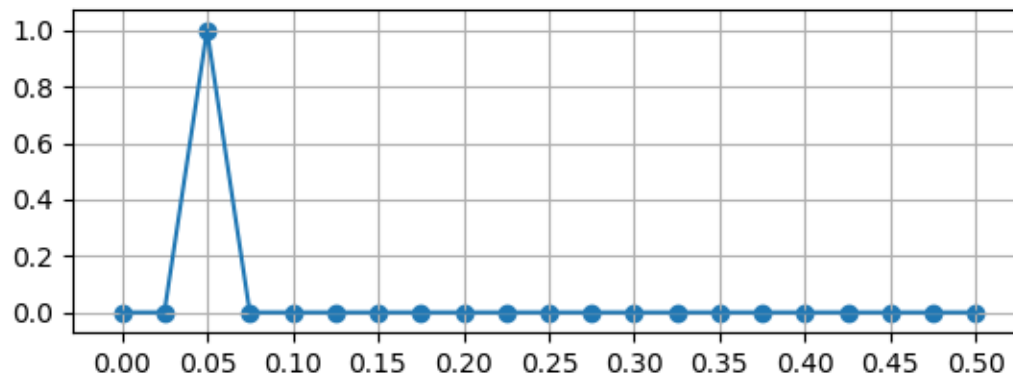
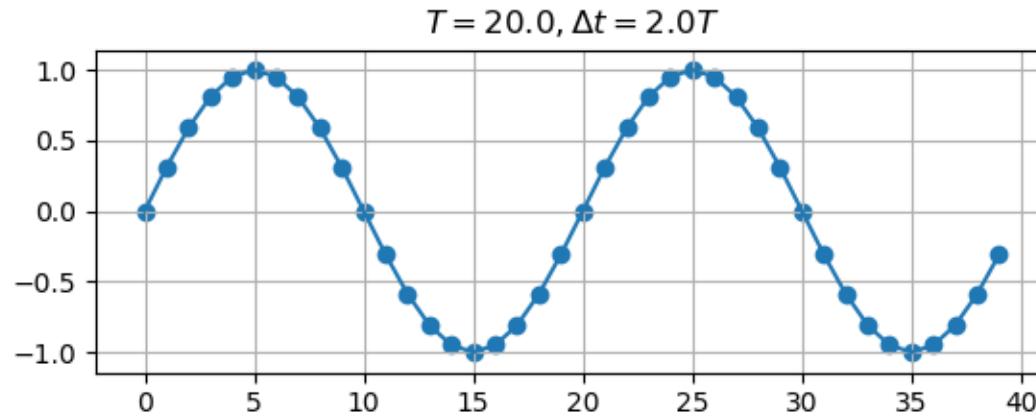
Felizmente, o problema atenua se a série for longa: 8.5 T



Felizmente, o problema atenua se a série for longa: 100.5 T



Mudando período

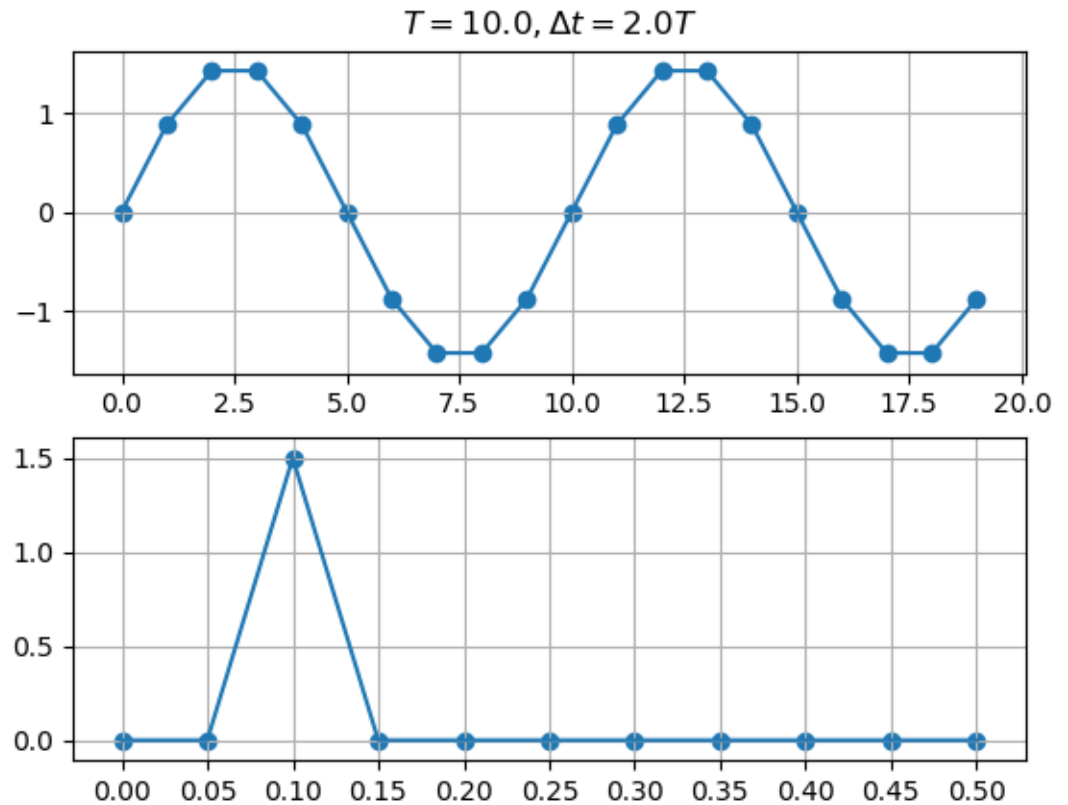


$$f = \frac{1}{T}$$

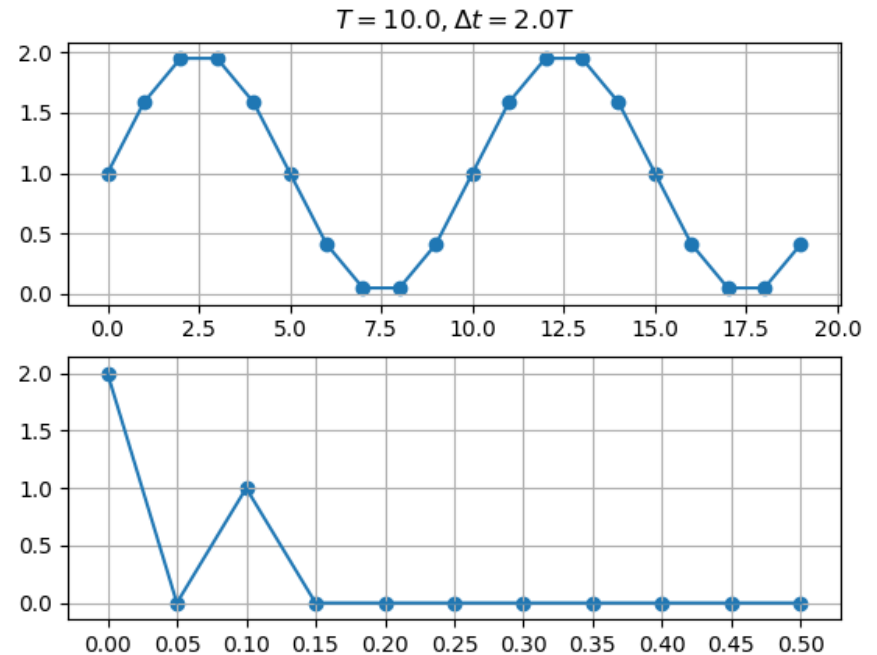
$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t}$$

Mudando a amplitude (a FFT é linear)

`f=1.5*np.sin(2*np.pi/T*t)`



Somando uma constante



```
plt.figure();kf=kf+1
t=np.arange(0,K*T,dt)
n=len(t)
f=np.sin(2*np.pi/T*t)+1
```

Mudando Δt

