Cálculo II exame 6/6/2019

① Resolve a equação diferencial $u' = -u^2$.

Para separar as variáveis, queremos dividir ambos os lados da equação por u^2. Mas, para evitar o perigo duma divisão por zero, guardamos de lado a solução $u = 0$.

No que se segue, admitimos que $u \neq 0$.

$$u' = -u^2$$

$$\frac{u'}{u^2} = -1$$

primitivamos ambos os lados da igualdade

$$-\frac{1}{u(t)} = -t + C$$

portanto $u(t) = \dfrac{1}{t-C}$

Juntamos a solução nula e obtemos como resposta final

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = \dfrac{1}{t-C} \\ \\ u(t) = 0 \end{array}\right.$$

Cálculo II exame 6/6/2019

(2) (A) O campo vectorial $(xy, x+y)$ é conservativo?

Para um campo $(P(x,y), Q(x,y))$ ser conservativo, é necessário que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Mas $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$$

portanto o campo não é conservativo.

Cálculo II exame 6/6/2019

(2) (c) O campo vectorial $(x+y, x+y)$ é conservativo? Se sim, calcule o seu potencial

Para um campo vectorial $(P(x,y), Q(x,y))$ ser conservativo, é necessário que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Verifiquemos: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$$

Portanto o campo é conservativo.

Procuramos então um potencial $f(x,y)$.

Queremos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+y$.

Consideremos a primeira igualdade e primitivemos ambos os lados na variável x.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$$

Substituimos esta expressão de f na segunda igualdade $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + g(y)\right) = x+y$$

$$x + g'(y) = x+y \qquad g'(y) = y$$

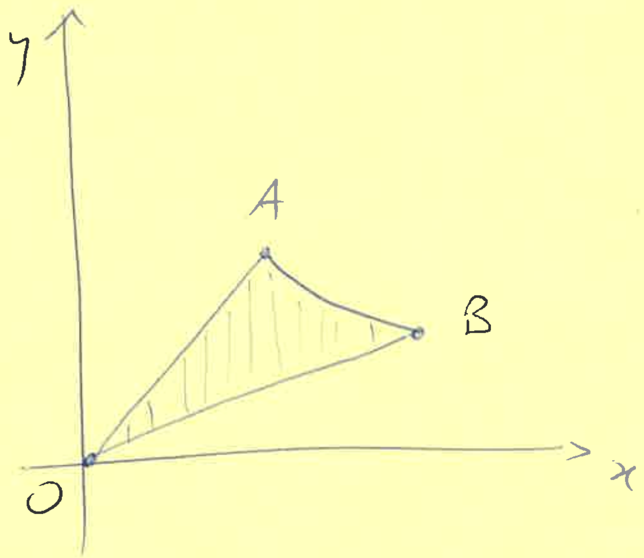
$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

Resposta final:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + C$$

Cálculo II exame 6/6/2019

(3) (A) Calcule o máximo e o mínimo de $f(x,y) = x^2y + xy - x - 2y$ em Ω



Começamos por procurar pontos estacionários no interior de Ω.

Condições necessárias de estacionaridade:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy + y - 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos a segunda equação e encontramos as soluções $x=1$, $x=-2$. Obviamente $x=-2$ fica longe de Ω. Para $x=1$ temos $y = \frac{1}{3}$.

O ponto $(1, \frac{1}{3})$ está no interior de Ω, portanto guardamo-lo como candidato.

Há outros três candidatos "por inerência": O, A e B.

Cálculo II exame 6/6/2019

③ Ⓐ continuação

Para ver se há outros candidatos para além destes quatro, analisamos o interior das três arestas, isto é, analisamos as arestas OA, OB e BA mas sem os pontos extremos, pois estes já foram incluídos na lista de candidatos.

Parametrizamos a aresta OA:

$y = x \qquad f(x,x) = g(x) = x^3 + x^2 - 3x$

~~Temos a solução óbvia $x =$~~

Procuramos os pontos estacionários da função $g(x)$:

$g'(x) = 0 \iff 3x^2 + 2x - 3 = 0 \iff$

$\iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$

A solução $x = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3}$ está obviamente longe de Ω

Verificamos que $0 < \dfrac{\sqrt{10}-1}{3} < 1$, portanto acrescentamos o candidato $\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}, \dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)$ à nossa lista

Cálculo II exame 6/6/2019

3 A continuação

Parametrizamos a aresta OB:

$x = 4y \qquad h(y) = f(4y, y) = 16y^3 + 4y^2 - 6y$

Procuramos os pontos estacionários de $h(y)$:

$h'(y) = 0 \iff 3 \cdot 16 \cdot y^2 + 8y - 6 = 0 \iff$

$\iff 24y^2 + 4y - 3 = 0 \iff y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{12}$

A solução $y = \dfrac{-1-\sqrt{19}}{12}$ encontra-se obviamente longe de Ω. Por outro lado, $\dfrac{\sqrt{19}-1}{12} > \dfrac{1}{4}$ portanto o candidato $\left(\dfrac{\sqrt{19}-1}{3}, \dfrac{\sqrt{19}-1}{12}\right)$ também não apresenta interesse.

Parametrizemos a aresta curva AB:

$y = \frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + 1 - x - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

A função φ é estritamente crescente no intervalo $[1,2]$, pelo que não tem pontos estacionários

Cálculo II exame 6/6/2019

③ ④ continuação

Temos a lista completa de candidatos:

$f(0,0) = 0$

$f(1,1) = -1$

$f(2, 1/2) = 0$

$f(1, 1/3) = -1$

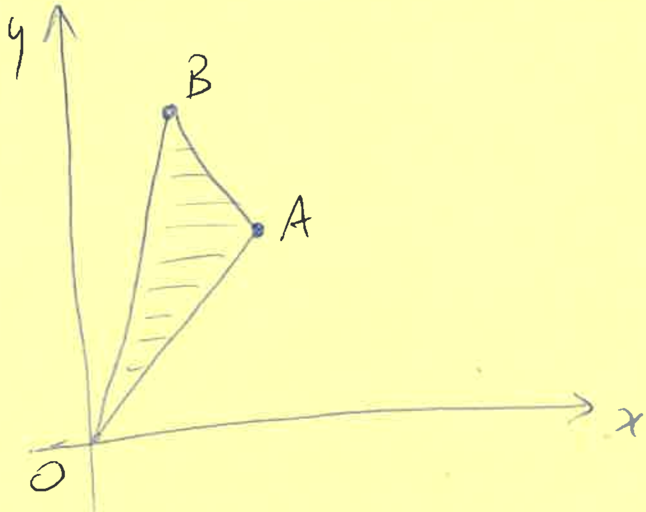
$$f\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}, \frac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = g\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = \frac{29-20\sqrt{10}}{27}$$

Observamos que $\frac{29-20\sqrt{10}}{27} < -1$

Portanto o valor máximo de f em Ω será $f(0,0) = f(2, 1/2) = 0$ enquanto que o mínimo será $f\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}, \frac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = \frac{29-20\sqrt{10}}{27}$

Cálculo II exame 6/6/2019

3 B Calcule o máximo e o mínimo de $f(x,y) = x^2y + xy - x - 2y$ em Ω



Ver a resolução de 3A com as seguintes diferenças:

O ponto estacionário de f, $(1, \frac{1}{3})$, não pertence a Ω portanto não o incluimos na lista

parametrizamos a aresta OB

$y = 4x$ $\quad h(x) = f(x, 4x) = 4x^3 + 4x^2 - 9x$

procuramos os pontos estacionários de $h(x)$:

$h'(x) = 0 \iff 12x^2 + 8x - 9 = 0 \iff$

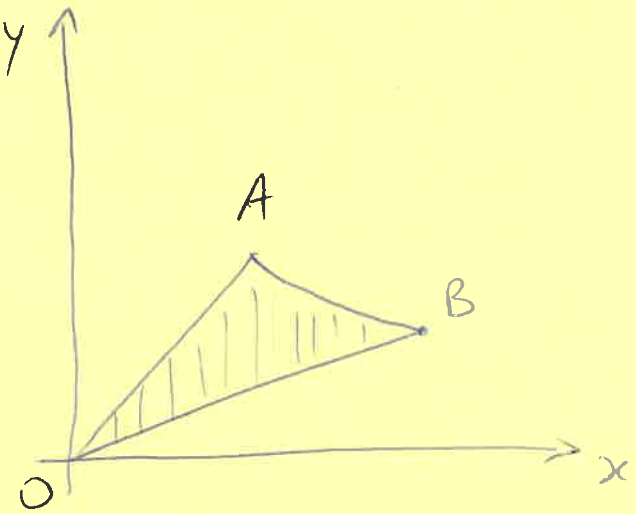
$\iff x = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{31}}{6}$

A solução $x = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{31}}{6}$ está longe de Ω

Por outro lado, $\frac{\sqrt{31}}{6} - \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ portanto o candidato $\left(\frac{\sqrt{31}}{6} - \frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{31}}{3} - \frac{4}{3}\right)$ também não nos interessa para esta análise.

Cálculo II exame 6/6/2019

3 c Calcule o mínimo e o máximo de $2xy - x - 2y$ em Ω



Começamos por procurar pontos estacionários no interior de Ω

Condições necessárias de estacionaridade:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O ponto $(1, \frac{1}{2})$ está no interior de Ω, portanto guardamo-lo como candidato.

Há outros três candidatos "por inerência":

O, A e B.

Para ver se há outros candidatos para além destes quatro, analisamos o interior das três arestas.

Cálculo II exame 6/6/2019

3 C continuação

Analisamos as arestas OA, OB e OA mas sem os pontos extremos, pois estes já foram incluído na lista de candidatos.

Parametrizamos a aresta OA.

$y = x \qquad g(x) = f(x, x) = 2x^2 - 3x$

Esta função tem um mínimo em $x = \frac{3}{4}$; acrescentamos $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ à lista de candidatos.

Parametrizamos a aresta OB

$x = 4y \qquad h(y) = f(4y, y) = 8y^2 - 6y$

Esta função tem um mínimo em $y = \frac{3}{8}$

Como $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$, descartamos este candidato.

Parametrizamos a aresta curva AB

$y = \frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = 2 - x - \frac{2}{x}$

Procuramos os pontos estacionários de $\varphi(x)$:

$\varphi'(x) = 0 \iff -1 + \frac{2}{x^2} = 0 \iff x^2 = 2 \iff$

$\iff x = \pm\sqrt{2}$

Cálculo II exame 6/6/2019

3 c continuação

Como $-\sqrt{2} < 0$, descartamos o candidato $\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Verificamos que $1 < \sqrt{2} < 2$,

portanto acrescentamos o candidato $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ à nossa lista.

Temos então a lista completa de candidatos

$f(0,0) = 0$

$f(1,1) = -1$

$f(2, 1/2) = -1$

$f(1, 1/2) = -1$

$f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

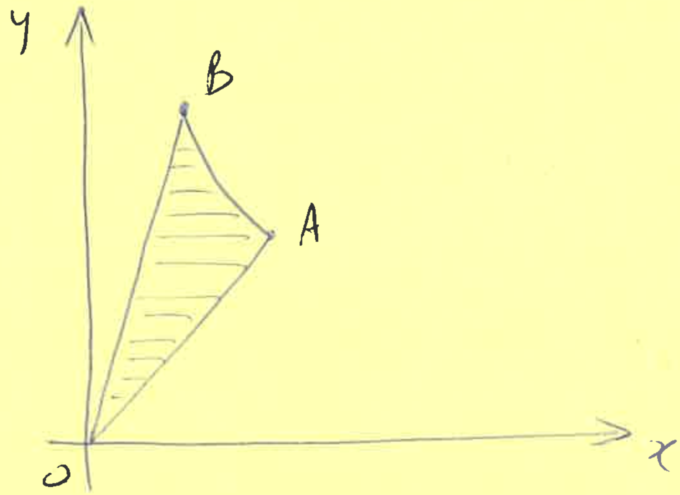
$f\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \varphi(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$

Observamos que $-\frac{9}{8} < -1 < 2 - 2\sqrt{2} < 0$

Portanto, o valor máximo de f em Ω será $f(0,0) = 0$ enquanto que o mínimo será $f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

Cálculo II exame 6/6/2019

(3) (D) Calcule o mínimo e o máximo de $2xy - x - 2y$ em Ω



Ver a resolução de 3C com as seguintes diferenças:

O ponto $(1, \frac{1}{2})$ não pertence a Ω, portanto não o incluimos na lista de candidatos

O ponto $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ também não pertence a Ω.

Portanto a lista final vai ter apenas quatro candidatos.

Cálculo II exame 6/6/2019

(4) (A) Calcule o comprimento da curva

$r : [1, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) = \left(3 - t^{3/2}, (3-t)^{3/2}, 3-t\right)$

Temos $r'(t) = \left(-\frac{3}{2} t^{1/2}, -\frac{3}{2}(3-t)^{1/2}, -1\right)$

$= \left(-\frac{3}{2}\sqrt{t}, -\frac{3}{2}\sqrt{3-t}, -1\right)$

$\|r'(t)\|^2 = \frac{9}{4} t + \frac{9}{4}(3-t) + 1 = \frac{27}{4} + 1 = \frac{31}{4}$

comprimento $= \int_C 1 \, ds = \int_{t=1}^{2} \|r'(t)\| \, dt =$

$= \int_{t=1}^{2} \frac{\sqrt{31}}{2} \, dt = \frac{\sqrt{31}}{2}$

Cálculo II exame 6/6/2019

(5) $$\int_{y=1}^{2} \int_{z=0}^{y^2} \int_{x=0}^{y+z} (2y+1)e^x \, dx\, dz\, dy = ?$$

$$\int_{x=0}^{y+z} (2y+1)e^x dx = (2y+1) \int_{x=0}^{y+z} e^x dx =$$

$$= (2y+1) \left[e^x \right]_{x=0}^{y+z} = (2y+1)\left(e^{y+z} - 1\right)$$

$$\int_{z=0}^{y^2} (2y+1)\left(e^{y+z} - 1\right) dz =$$

$$= (2y+1) \int_{z=0}^{y^2} \left(e^{y+z} - 1\right) dz =$$

$$= (2y+1) \left[e^{y+z} - z \right]_{z=0}^{y^2} =$$

$$= (2y+1)\left(e^{y+y^2} - y^2 - e^y + 0\right)$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)\left(e^{y+y^2} - y^2 - e^y\right) dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) e^{y+y^2} dy - \int_{y=1}^{2} (2y+1) y^2 dy -$$

$$- \int_{y=1}^{2} (2y+1) e^y dy$$

Cálculo II exame 6/6/2019

(5) continuação

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)\, e^{y+y^2}\, dy = \int_{s=2}^{5} e^s\, ds =$$

$$s = y+y^2$$
$$ds = (2y+1)\,dy$$

$$= \left[e^s\right]_{s=2}^{5} = e^5 - e^2$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)\, y^2\, dy = \int_{y=1}^{2} (2y^3+y^2)\, dy =$$

$$\cancel{= \int_{y=1}^{2} \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3}\right) dy =}$$

$$= \left[\frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{2} = \frac{16}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= 8 - \frac{1}{2} + \frac{7}{3}$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)\, e^y\, dy = \int_{y=1}^{2} (2y+1)\,(e^y)'\, dy =$$

$$= \left[(2y+1)\,e^y\right]_{y=1}^{2} - \int_{y=1}^{2} (2y+1)'\, e^y\, dy =$$

$$= 5e^2 - 3e - 2\int_{y=1}^{2} e^y\, dy = 5e^2 - 3e - 2\left[e^y\right]_{y=1}^{2} =$$

$$= 5e^2 - 3e - 2e^2 + 2e = 3e^2 - e$$