Mecânica Analítica

Série 4: Formulação Hamiltoniana e transformações canónicas

1. [1] Usando as transformações de Legendre, derive o Lagrangeano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ a partir do Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$.

2. [1] Escreva o problema da força central de duas massas pontuais no formalismo Hamiltoniano, eliminando as coordenadas cíclicas, e reduza o problema a quadraturas.

3. [1] Uma formulação semelhante à Hamiltoniana pode ser derivada, no qual $\dot{q}_i$ e $\dot{p}_i$ são variáveis indepedentes, com o "Hamiltoniano" $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ (p_i é definido da forma usual.) Partindo da formulação Lagrangeana, derive $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ e as correspondentes equações do movimento.

4. [1] Uma partícula de massa m pode-se mover ao longo de uma dimensão sobre a influência de duas molas fixas a uma distância a uma da outra (uma à esquerda e outra à direita da partícula). As molas seguem a lei de Hooke, têm comprimento de relaxação zero e constante k_1 (esquerda) e k_2 (direita).

   (a) Usando como coordenada generalizada a posição da partícula relativamente ao ponto de fixação da mola do lado esquerdo, escreva o Lagrangeano e respetivo Hamiltoniano do sistema. A energia é conservada? E o Hamiltoniano?

   (b) Introduza uma nova coordenada Q definida como,

   $$Q = q - b \sin \omega t, \quad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \quad . \tag{1}$$

   Escreva o Lagrangeano em termos de Q. Qual o Hamiltoniano correspondente? A energia é conservada? E o Hamiltoniano?

5. [1] O Lagrangeano de um sistema com um grau de liberdade é dado por,

   $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 \sin^2 \omega t + \dot{q} q \omega \sin 2\omega t + q^2 \omega^2\right) \quad . \tag{2}$$

   (a) Qual é o Hamiltoniano correspondente? É conservado?

   (b) Introduzindo uma nova coordenada $Q = q \sin \omega t$, escreve o Lagrangeano em termos desta nova coordenada e o Hamiltoniano correspondente. O Hamiltoniano conserva-se?

6. [1] Se as variáveis canónicas não forem todas independentes, mas acopladas por condicionamentos da forma,

   $$\Psi_k(q_i, p_i, t) = 0 \quad , \tag{3}$$

   mostre que as equações canónicas do movimento podem ser escritas como,

   $$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad , \tag{4}$$

   onde λ_k são multiplicadores de Lagrange.

7. Mostre que $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ e $\{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}$.

8. Mostre que se uma transformação $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ for canónica, então $\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$ e $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$.

9. [1] Mostre que a transformação,

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \quad , \quad P = q\cot p \tag{5}$$

é canónica.

10. [1] Determine em que condições, a transformação,

$$Q = \frac{\alpha p}{x} \quad , \quad P = \beta x^2 \quad , \tag{6}$$

onde α e β são constantes, representa uma transformação canónica para um sistema com um grau de liberdade. Obtenha a função geradora apropriada.

11. Mostre que os parêntesis de Poisson são invariantes a uma transformação canónica $(q, p) \to (Q, P)$, ou seja, $\{u, v\}_{q,p} = \{u, v\}_{Q,P}$, onde u e v são duas funções arbitrárias.

12. A partir das relações,

$$\begin{gathered}
p_i = \tfrac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\tfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}, K = H + \tfrac{\partial F_1}{\partial t} \\
p_i = \tfrac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \tfrac{\partial F_2}{\partial P_i}, K = H + \tfrac{\partial F_2}{\partial t} \\
q_i = -\tfrac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\tfrac{\partial F_3}{\partial Q_i}, K = H + \tfrac{\partial F_3}{\partial t} \\
q_i = -\tfrac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \tfrac{\partial F_4}{\partial P_i}, K = H + \tfrac{\partial F_3}{\partial t}
\end{gathered}$$

mostre que,

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}, \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}. \tag{7}$$

Referências

[1] Goldstein, H., Pool, C., and Safko, J. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA, 2002.