14.

a) Y – v.a. que representa o n.º de registos de entradas, em 3 escolhidas ao acaso, com erros
Sendo p a probabilidade de que o registo de uma entrada (qualquer) esteja errado, tem-se:
"Os empregados das empresas fazem erros nos registos de entrada em cerca de 5% das vezes" $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ "A probabilidade do registo de uma entrada (qualquer) estar errado é igual a 0.05" $\Leftrightarrow$ $p = 0.05$
Sendo os registos escolhidos ao acaso, cada um deles está errado, ou não, independentemente dos restantes. Assim, a inspecção de um registo corresponde a uma prova de Bernoulli, com probabilidade de sucesso (o registo estar errado) igual a p e a v.a. Y serve para "contar" o número de sucessos em 3 provas daquelas, pelo que, tem distribuição Binomial com parâmetros $n = 3$ (n.º de provas) e $p = 0.05$ (probabilidade de sucesso). Na notação habitual,

$$Y \cap Bi(3, 0.05),$$

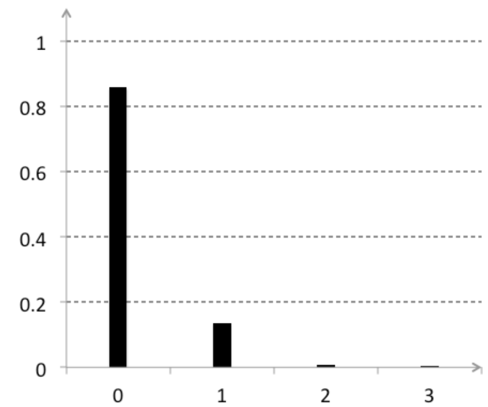
ficando imediatamente implícito que a sua f.m.p. é:

$$P(Y= k) = C^3_k\, 0.05^k\, 0.95^{3-k},\ \ k= 0, 1, 2, 3.$$

b) $Y \cap Bi(3, 0.05) \Rightarrow E(Y) = 3\times0.05 = \underline{0.15}$ e $Var(Y) = 0.15\times0.95 = \underline{0.1425}$
f.m.p. de Y:

k	0	1	2	3
P(Y= k)	0.8574	0.1354	0.0071	0.0001

Representação gráfica:



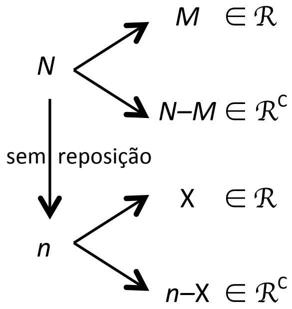
c) "mais do que um erro" $\Leftrightarrow$ {Y> 1}
$P(Y> 1) = P(Y= 2) + P(Y= 3) = 0.0071 + 0.0001 = \underline{0.0072}$

15. Seja Y – v.a. que representa o n.º de candidatos, em 10 escolhidos ao acaso de entre os 60, que são estrangeiros.

A experiência amostral que determina a distribuição de Y é um caso particular da seguinte:

1. uma população, $\mathcal{P}$, com N elementos, está dividia em 2 grupos: um grupo, $\mathcal{R}$, com M elementos, em que todos têm uma certa característica de interesse (cada elemento de $\mathcal{R}$ é um "sucesso" relativamente ao facto de possuir a característica em questão) e um grupo, $\mathcal{R}^C$, com N–M elementos que não têm a característica de interesse (cada um destes é um "insucesso");
2. pretende seleccionar-se, ao acaso e <u>sem reposição</u>, n elementos da população;
3. a variável de interesse, X, é a que "conta" o número de elementos, de entre os n que serão seleccionados, que possuem a característica de interesse (que pertencem a $\mathcal{R}$ ou, utilizando a nomenclatura binomial, são sucessos).

Esquematicamente:



É possível demonstrar que a f.m.p. de X é a seguinte:

$$P(X= k) = C^{M}{}_{k} \times C^{N-M}{}_{n-k} \,/\, C^{3}{}_{k}, \quad \max(0, n+M-N) \le k \le \min(M, n).$$

Diz-se que X tem distribuição hipergeométrica de parâmetros N, M e n e denota-se

$$X \cap H(N, M, n).$$

Note-se que o numerador da P(X= k) corresponde ao número total de subconjuntos de $\mathcal{P}$ com n elementos e exactamente k pertencentes a $\mathcal{R}$ e o denominador corresponde ao número total de subconjuntos de $\mathcal{P}$ com n elementos.

No caso do exercício em questão, tem-se:

N – n.º de candidatos: $N = 60$;

M – n.º de candidatos estrangeiros (característica de interesse para a contagem): $M = 20$;

n – n.º de candidatos escolhidos ao acaso: $n = 10$,

pelo que, $Y \cap H(60, 20, 10)$

a) "5 dos 10 seleccionados são estrangeiros" ⇔ {Y= 5}

$P(Y = 5) = C^{20}{}_{5} \times C^{40}{}_{5} / C^{60}{}_{10} = 20!/(5! \times 15!) \times 40!/(5! \times 35!) \times (10! \times 50!)/60! \approx \underline{0.1353}$

b) "Dos 10 seleccionados no máximo 2 são estrangeiros" ⇔ {Y≤ 2}

$P(Y \le 2) = P(Y= 0) + P(Y= 1) + P(Y= 2) = (C^{40}{}_{10} + C^{20}{}_{1} \times C^{40}{}_{9} + C^{20}{}_{2} \times C^{40}{}_{8}) / C^{60}{}_{10} \approx \underline{0.2776}$