BIBLIOGRAFIA

[D] J.P. DIAS – "*Equações Diferenciais I*", Textos e Notas Nº 22, C.M.A.F., Lisboa, 1980.

[K] T. KAWATA – "*Fourier Analysis in Probability Theory*", Academic Press, N.Y. 1972.

[KF] A.N. KOLMOGOROV & S.V. FOMIN – "*Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional*", Ed. Mir, Moscovo, 1975.

[L] S. LANG – "*Real Analysis*", Addison-Wesley, Reading, 1969

[M] A. MACHADO – "*Medida e Integração*", Textos e Notas Nº 3, C.M.A.F., Lisboa, 1976.

[Mℓ] P. MALLIAVIN – "*Intégration et Probabilités. Analyse de Fourier et Analyse Spectrale*", Masson, Paris, 1982.

[P] I.V. PESIN – "*Classical and Modern Integration Theories*", Academic Press, N.Y., 1970.

[RN] F. RIESZ & B. SZ-NAGY – "*Leçons d'Analyse Fonctionelle*", 3ème ed., Acad Sc. Hongrie (1955).

[R] W.RUDIN – "*Real and Complex Analysis*", 2nd ed., Tata McGraw - Hill, New Delli 1974.

[SW] E.M. STEIN & G.WEISS – "*Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*", Princeton Univ. Press. New Jersey, 1971

[Y] K. YOSIDA – "*Functional Analysis*", 5th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1978.

TEXTOS E NOTAS

30

COMPLEMENTOS DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

José Francisco Rodrigues

CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS DAS UNIVERSIDADES DE LISBOA
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA
CMAF

1983

CAPÍTULO 1 PRELIMINARES

"The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites".

P. HALMOS (citado por M. Reed & B. Simon)

INTRODUÇÃO

§ 1.1 A teoria do integral é fundamental não só como um instrumento básico na análise e nas suas aplicações, como também pelo facto de constituir uma teoria completa e intrinsecamente elegante onde elementos de vários ramos da Matemática se combinam de maneira atraente.

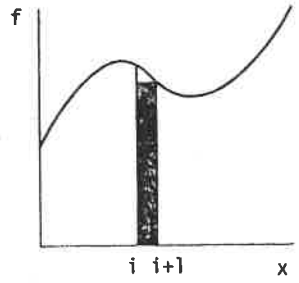
O clássico integral de Riemann associa a certas funções definidas em certos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ um número, dito o integral da função. Este conceito está sujeito a determinadas restrições sobre as funções e sobre os domínios de integração. As noções de comprimento, área ou volume estão bem definidas na teoria clássica desde que se refiram a conjuntos não muito "patológicos". No entanto, em Análise e nas suas aplicações, tais como a Mecânica e a Física-Matemática ou a Teoria das Probabilidades, a noção de medida, que pode assumir o nome de área, massa, carga ou probabilidade, e a noção de integral, o qual pode ser interpretado, consoante a situação, como volume, pressão, potencial ou esperança matemática duma variável aleatória, necessitam frequentemente de ser definidas para conjuntos e funções que escapam ao âmbito estreito da teoria clássica.

A extensão do integral de Riemann conduz ao integral de Lebesgue. Este continua a ser um funcional sobre uma certa classe de funções (maximal num certo sentido) que inclui as funções integráveis à Riemann, e está associado a uma medida definida no domínio daquelas.

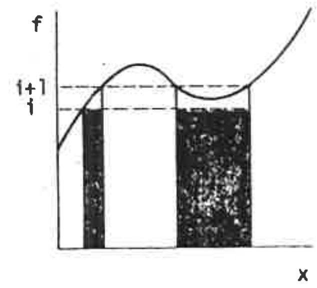
§ 1.2 Com o objectivo de ilustrar esta extensão comecemos por recordar formalmente o processo usual de construção dos dois integrais num caso simples.

O integral de Riemann duma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido como o limite, quando existe, da soma das áreas de fi-

nos rectângulos que aproximam a superfície limitada pelo gráfico de f. Este processo de construir o integral



O integral de Riemann



O integral de Lebesgue

exige mais do que é necessário sobre o valor da função em todos os pontos (daí o quadro natural do integral de Riemann ser o das funções seccionalmente contínuas, o que, em particular, exige pelo menos uma topologia sobre o domínio das funções).

O integral de Lebesgue é ainda o limite da soma das áreas de rectângulos aproximando a superfície limitada pelo gráfico de f. Mas existe uma diferença fundamental na construção desses rectângulos: o contradomínio de f é divido num número finito de pequenos intervalos os quais determinam os conjuntos A_i de todos os x tais que f(x) pertence ao i-ésimo intervalo; associe-se uma medida $\mu(A_i)$ ao conjunto A_i e considere-se a sucessão de funções em escada f_n tais que $f_n(x) = \alpha_i$ para $x \varepsilon A_i$, sendo α_i um valor de f no i-ésimo intervalo; o integral de Lebesgue será então o limite das so mas $\sum_i \alpha_i \mu(A_i)$, quando tal limite existir.

§ 1.3 A integração à Lebesgue, ao introduzir os conjuntos A_i e a medida $\mu(A_i)$, põe em evidência as propriedades necessárias do espaço de definição das funções a integrar, o que permite a sua extensão ao caso de funções tendo por domínio conjuntos abstractos desprovidos de qualquer topologia. No entanto, tanto na sua origem histórica como nas suas aplicações mais importantes não é esse o aspecto essencial do integral de Lebesgue, mas sim o facto das suas propriedades satisfazerem as necessidades básicas da Análise e das suas aplicações.

Estre estas, contam-se duas propriedades essenciais do integral de Lebesgue que o caracterizam como sendo essencialmente a extensão minimal do integral de Riemann: por um lado, a comutatividade do integral e da passagem ao limite é válida num sentido mais geral como, por exemplo, no teorema da convergência de Lebesgue e, por outro lado, dispõe-se de certos espaços de funções, os espaços L^p , os quais são espaços completos que desempenham um papel fundamental na Análise Funcional.

Em particular, o espaço L^2 das funções de quadrado integrável (à Lebesgue) constitui um exemplo básico dum espaço de Hilbert, no qual a existência de sistemas ortogonais completos de funções permite uma formulação mais elegante e completa da teoria das séries de Fourier.

A vantagem da teoria de Lebesgue não está só no factc de se estender a noção de medida e de integral a uma classe mais vasta de objectos, mas também, e principalmente, no facto de a medida (e o integral) de Lebesgue ser a solução única do problema da medida para a classe dos conjuntos mensuráveis. Isto porque não é possível construir uma medida mais geral que a de Lebesgue conservando as propriedades básicas ($\mu([0,1])=1$, a invariância para as isometrias e a σ-aditividade), as quais são as "razoáveis" para a noção de medida. Além disso, Lebesgue não limitou as suas pesquisas à construção da teoria, tendo ainda estudado a sua aplicação aos problemas clássicos da integração, tais como a determinação de funções primitivas e de áreas.

§ 1.4 Historicamente, o trabalho original de Lebesgue, publicado no início no século (1902), versava as funções reais de variável real e a noção de medida na recta real.

Este exemplo básico em torno do qual se construiu uma teoria geral é típico da praxis matemática, na medida em que um método introduzido inicialmente por Lebesgue e por Riesz para o modelo concreto dos reais permitiu a extensão de uma série de teoremas gerais básicos a espaços de medida abstractos. É claro que nem todas as características da teoria de Lebesgue podem ser generalizáveis, visto que toda a extensão duma teoria tem o seu preço e a evolução da Matemática está longe de ser "linear" ...

A teoria de Lebesgue impôs-se entre outras teorias do integral como a mais útil generalização do integral de Riemann. A sua extensão a medidas mais gerais em espaços euclideanos foi efectuada à volta de 1910 por Radon, Young, Riesz e pelo próprio Lebesgue, e conduziu à teoria da integração em espaços abstractos por Moore (1912)) e, sobretudo, por Fréchet (1915).

Hoje em dia a teoria da integração está essencialmente completa e é objecto de inúmeros tratados e livros de texto.

ESPAÇOS DE MEDIDA

§ 1.5 Nem todas as colecções de subconjuntos dum espaço X são adequadas para neles se definir uma medida. Assim a noção de *espaço mensurável* aplica-se apenas ao par $(X,\mathfrak{S})$ em que X é um conjunto e $\mathfrak{S}$ é uma σ-*álgebra* em X, i.e., uma classe de partes de X, tal que, (i) $X\in\mathfrak{S}$; (ii) se $A\in\mathfrak{S}$, o seu complementar $A^c\in\mathfrak{S}$; (iii) se $A_n\in\mathfrak{S}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathfrak{S}$. Os elementos de $\mathfrak{S}$ chamam-se *conjuntos mensuráveis* em X. É imediato que o conjunto vazio $\emptyset$ é mensurável, que a diferença simétrica e a intersecção numerável de conjuntos mensuráveis são ainda conjuntos mensuráveis. É ainda fácil verificar que dada uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X a intersecção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{C}$ é ainda uma σ-álgebra em X, a qual se chama σ-álgebra *gerada* por $\mathcal{C}$ e é, consequentemente, a menor de todas elas. No caso de X ser um espaço topológico, a σ-álgebra gerada pela colecção dos abertos de X é a σ-álgebra dos *borelianos* de X, ou σ-*álgebra de Borel*.

§ 1.6 Uma *medida* (ou uma *medida positiva* quando houver necessidade de distinguir doutro tipo de medidas) é uma função μ definida sobre uma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+\equiv[0,\infty]$ que verifica a propriedade de σ-aditividade:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \quad , \text{ para } A_n\in\mathfrak{S}: A_n\cap A_m=\emptyset, \forall\, n,m\in\mathbb{N}, n\neq m$$

(exclui-se o caso trivial $\mu(A)=\infty$ para todo $A\in\mathfrak{S}$).

É fácil ver que desta difinição resultam as propriedades

(a) $\mu(\emptyset)=0$;

(b) $A\subset B$ com $A,B\in\mathfrak{S}$, implica $\mu(A)\leq\mu(B)$, e se $\mu(A)<\infty$, também $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$;

(c) $\mu(A_n)\to\mu(A)$ quando $n\to\infty$, para $A_n\in\mathfrak{S}$, $n\in\mathbb{N}$

i) com $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, se $A_n\subset A_{n+1}$ e

ii) com $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, se $A_n\supset A_{n+1}$ e $\mu(A_1)<\infty$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ então $\mu(\overline{\lim_n} A_n)=0$, onde $\overline{\lim_n} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

Recordemos, que a introdução da semi-recta acabada

$\overline{\mathbb{R}}_+$ é acompanhada da convenção usual que garante a manutenção das leis comutativa, associativa e distributiva nos reais:

$$a + \infty = \infty \quad \text{se} \quad 0 \leq a \leq \infty \; ;$$

$$a.\infty = \infty \quad \text{se} \quad 0 < a \leq \infty \quad \text{e} \quad a.\infty = 0 \quad \text{se} \quad a=0.$$

§ 1.7 Um *espaço de medida* é um terno $(X, \mathcal{G}, \mu)$ em que X é um conjunto, $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida.

A medida μ diz-se *σ-finita* se X é união numerável de elementos de $\mathcal{G}$ com medida finita. Se $\mu(X) < \infty$ então μ é uma medida *finita*. Em particular, se $\mu(X) = 1$ μ é uma probabilidade e $(X, \mathcal{G}, \mu)$ um espaço de probabilidades.

Um exemplo simples é a chamada *medida de contagem* sobre X, em que $\mathcal{G}$ é formado pela totalidade dos subconjuntos de X, $\mu(A) = \infty$ se A é um conjunto infinito e $\mu(A)$ o número de pontos em A no caso contrário. No caso de X ser finito, obtem-se uma probabilidade dividindo a medida de contagem pelo cardinal de X. Por exemplo, a probabilidade atribuída a cada face de um dado equilibrado é $1/6$.

A medida de contagem sobre os naturais, i.e., $X=\mathbb{N}$ mostra que em 1.6(c)i) a hipótese $\mu(A_1) < \infty$ é necessária (pondo $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, vem $\mu(A_n) = \infty$ e $A = \emptyset$).

Diz-se que uma propriedade se verifica *quase sempre* relativamente à medida μ, e abreviaremos por q.s. $[\mu]$,

(em francês e em inglês as abreviaturas são p.p. e a.e. respectivamente) se se verificar para todos os pontos de X excepto, eventualmente, para um conjunto de pontos A de medida nula, i.e., $\mu(A)=0$. Por vezes é conveniente, e sempre possível, estender a classe de conjuntos mensuráveis de tal modo que todo o subconjunto dum conjunto de medida nula seja ainda mensurável e de medida nula. Esta propriedade caracteriza as *medidas completas*.

Sejam $M=(X, \mathcal{G}, \mu)$ e $N=(Y, \mathcal{T}, \nu)$ dois espaços de medida σ-finita. Define-se a σ-álgebra $\mathcal{G} \otimes \mathcal{T}$ de subconjuntos do produto cartesiano $X \times Y$ como sendo a σ-álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, $A \in \mathcal{G}$ e $B \in \mathcal{T}$. Prova-se que existe uma única medida $\mu \otimes \nu$ definida sobre $\mathcal{G} \otimes \mathcal{T}$ chamada *medida produto*, tal que

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \;, \quad \forall A \in \mathcal{G},\; B \in \mathcal{T}$$

Ao espaço de medida $M \times N = (X \times Y, \mathcal{G} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \nu)$ dá-se o nome de *espaço de medida produto*.

FUNÇÕES MENSURÁVEIS

§ 1.8 Uma aplicação f dum espaço mensurável $(X, \mathcal{G})$ noutro espaço mensurável $(Y, \mathcal{B})$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por exemplo, se X e Y são espaços topológicos e se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{B}$ forem as famílias dos borelianos de X e Y, respectivamente, então toda a aplicação contínua de X em Y é obviamente mensurável.

Quando Y fôr um espaço topológico e $\mathcal{B}$ não fôr explicitado, subentende-se usualmente que $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra dos borelianos de Y. Em particular, podemos afirmar que uma função real f definida em $(X,\mathfrak{S})$ é mensurável quando verificar a condição equivalente

$$\{x:f(x)<a\}\in\mathfrak{S}\ ,\qquad \forall a\in\mathbb{R}\ .$$

Uma função complexa $f=u+iv$ é mensurável se as funções reais u e v o forem. O conceito de mensurabilidade das funções complexas é fechado para a adição, produto, módulo $|.|$ e para o limite pontual de sucessões.

Tem-se ainda que se f e g são funções reais mensuráveis também o são as funções $\sup(f,g)$ e $\inf(f,g)$. Em particular, isto é válido para as partes positivas e negativas de f:

$$f^+=\sup(f,0)\quad \text{e}\quad f^-=-\inf(f,0).$$

INTEGRAÇÃO ABSTRACTA

§ 1.9 Uma função diz-se *simples* se o seu contradomínio é formado apenas por um número finito de reais positivos. É necessariamente da forma

$$s=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\chi_{A_j}\ ,$$

sendo $\alpha_j\in\mathbb{R}_+$ e χ_{A_j} a função característica do conjunto $A_j=\{x|s(x)=\alpha_j\}$. É claro que s é mensurável sse os conjuntos A_j o forem.

Dada uma medida positiva μ sobre uma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ dum conjunto X, define-se o integral (de Lebesgue) duma função simples mensurável s por meio de

$$\int_X s\ d\mu=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\ \mu(A_j)\ .$$

Para uma função f mensurável e *não-negativa*, define-se

$$\int_X f\ d\mu=\sup_{s}\int_X s\ d\mu\ ,$$

sendo o supremo tomado relativamente a todas as funções simples mensuráveis s tais que $0\leq s\leq f$. O integral de Lebesgue de f assim definido é um número pertencente a $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$.

Se f é mensurável e *real*, pondo $f=f^+-f^-$, define-se

$$\int_X f\ d\mu=\int_X f^+\ d\mu-\int_X f^-\ d\mu$$

desde que pelo menos um dos integrais da direita seja finito. No caso de ambos os integrais serem finitos diz-se que f é *integrável à Lebesgue* em X. O conjunto destas funções costuma-se indicar por L^1(ou por $L^1(X)$,$L^1(\mu)$,$L^1(X,\mu)$ quando houver a necessidade de pôr em evidência o conjunto, a medida ou ambos).

Uma função $f=u+iv$ mensurável e *complexa* diz-se integrável em X desde que $|f|=(u^2+v^2)^{1/2} \in L^1$ e define-se

$$\int_X f\, d\mu = \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu .$$

Indicando este facto do mesmo modo, é claro que $f \in L^1$ sse $u,v \in L^1$.

Se se quiser integrar f apenas num subconjunto mensurável $A\subset X$, basta considerar

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f\, \chi_A\, d\mu .$$

Uma das consequências imediatas destas definições é o facto de $\mu(A) = 0$ implicar $\int_A f\, d\mu = 0$, o que se traduz informalmente por: os conjuntos de medida nula são "desprezáveis" na integração. Em particular, duas funções iguais quase sempre (i.e., $\mu(\{x|f(x)\neq g(x)\})=0$) têm o mesmo integral sobre qualquer conjunto mensurável. Este facto leva-nos a considerar no espaço L^1 a relação de equivalência "igual quase sempre" e a identificar cada função de L^1 com a sua classe de equivalência. Este procedimento mostra ainda a importância de se considerarem na integração as medidas completas.

PROPRIEDADES DO INTEGRAL

§ 1.10 De ora em diante consideraremos todos os conjuntos e funções sempre mensuráveis.

Uma das propriedades essenciais do integral de Lebesgue diz respeito à comutatividade dos processos de integração e passagem ao limite. Começamos por recordar duas propriedades básicas para funções não-negativas e que são conhecidas respectivamente por (1) *Lema de Fatou* e (2) *Teorema da convergência monótona de Beppo-Levi:*

TEOREMA 1.1. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas. Então tem-se

$$(1) \quad \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu , \quad (*)$$

e, no caso de ser $0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq\infty$, q.t. $x\in X$,

$$(2) \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\mu . \; \square$$

Usando esta permutabilidade do limite com o integral, juntamente com o facto de toda a função não negativa poder ser aproximada pontual e monotonamente (e mesmo uni -

(*) Recorde-se que $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k$ existe sempre.

formemente se fôr limitada) por funções simples, obtêm-se uma série de propriedades do integral passando do caso simples sucessivamente às funções não-negativas, às reais e às complexas.

§ 1.11 **TEOREMA** 1.2 (a) Se f é limitada em X e $\mu(X)<\infty$, então $f\in L^1(X)$,

(b) se $m\leq f\leq M$, em $X (m,M\in\mathbb{R})$ e $\mu(X)<\infty$, então

$$m\mu(X)\leq \int_X f\,d\mu \leq M\mu(X);$$

(c) se $f\leq g$ em X e se ambos integrais existem, então

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu \;;$$

(d) se $f,g\in L^1(X)$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ então $\alpha f+\beta g\in L^1(X)$ e

$$\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu + \beta\int_X g\,d\mu \;;$$

(e) se $f\in L^1(X)$, então

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu \;;$$

(f) $f\in L^1(X)$ e $A\subset X$, então $f\in L^1(A)$ e

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu \;, \text{ se } f\geq 0 \;;$$

(g) se $f\in L^1(X)$ e $\int_A f\,d\mu = 0$ para todo $A\subset X$, então

$f = 0$ em X. $\square$

Note-se que as relações entre funções é tomada no sentido quase sempre relativamente à medida μ.

Uma consequência da aditividade do integral e do teorema da convergência monótona é a possibilidade de obter novas medidas a partir da integração das funções não-negativas, resultado este que admite um importante recíproco — o teorema de Radon-Nikodym — que estudaremos no Capítulo 3.

TEOREMA 1.3 Dada uma função f não-negativa e mensurável, tem-se que

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu \qquad (A\in\mathfrak{S},\ \sigma\text{-álgebra de } X),$$

define uma medida (positiva) ν sobre $\mathfrak{S}$. $\square$

§ 1.12 Um outro resultado importante estabelece um critério para a troca do "$\int$" com o "lim" para funções complexas e é conhecido pelo *teorema da convergência dominada* (de Lebesgue):

TEOREMA 1.4 Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis complexas convergindo pontualmente quase sempre em X. Se existe uma função $g\in L^1$, tal que $|f_n(x)|\leq g(x)$ para todo n e quase todo $x\in X$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\mu . \; \square$$

§ 1.13 Terminamos esta revisão das propriedades do integral com o bem conhecido *teorema de Fubini* que permite a troca de ordem de integração nos espaços de medida produto.

TEOREMA 1.5 Sejam $(X,\mathcal{G},\mu)$ e $(Y,\mathcal{T},\nu)$ dois espaços de medida σ-finita e seja $f=f(x,y)$ uma função mensurável em $X \times Y$:

i) (Tonelli) se f é positiva $(0 \le f \le \infty)$, tem-se sempre

$$\int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu \right) d\nu \; ;$$

ii) (Fubini) se f é complexa e pelo menos um dos integrais seguintes é finito

$$I_1 = \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) \; , \; I_2 = \int_X \left(\int_Y |f| \, d\nu \right) d\mu \, , \; I_3 = \int_Y \left(\int_X |f| \, d\mu \right) d\nu ,$$

então tem-se

(a) $f(\cdot,y) \in L^1(X)$ para quase todo o $y \in Y$,

(b) $f(x,\cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo o $x \in X$,

(c) $\int_X f(x,\cdot) d\mu \in L^1(Y)$,

(d) $\int_Y f(\cdot,y) d\nu \in L^1(X)$,

(e) $I_1 = I_2 = I_3$, $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, sendo ainda válida a igualdade da alínea i). $\square$

De um modo informal, diz-se que a ordem de integração pode ser invertida sempre que $f \ge 0$ ou então que um dos três integrais I_1, I_2 ou I_3 seja finito.

A MEDIDA DE LEBESGUE EM $\mathbb{R}^N$

§ 1.14 O conceito geral de medida constitui uma generalização natural dos conceitos de comprimento, área ou volume. Um exemplo concreto de medida que engloba essas noções elementares e é de extrema importância teórica e prática é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n - \lambda$:

TEOREMA 1.6 Existe uma medida (positiva) completa λ definida numa σ-álgebra $\mathcal{L}$ em $\mathbb{R}^n$, tal que:

(a) $\lambda\left(\prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[\right) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$,

(b) λ é invariante por translação , i.e.,

$$\lambda(E+x) = \lambda(E) \quad , \quad E \in \mathcal{L}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(c) λ é regular, i.e., para todo o $E \in \mathcal{L}$

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(V) : E \subset V \text{ aberto}\} = \sup\{\lambda(K) : E \supset K \text{ compacto}\};$$

(d) $\mathcal{L}$ contém os borelianos de $\mathbb{R}^n$, tendo-se $E \in \mathcal{L}$ sse existe uma união numerável de fechados A e uma intersecção numerável de abertos B, tais que

$$A \subset E \subset B \quad e \quad \lambda(B-A)=0 \ . \ \square$$

Os elementos de $\mathcal{L}$ dizem-se *mensuráveis à Lebesgue* e tem-se que $\mathcal{L}$ contem estritamente a σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos borelianos de $\mathbb{R}^n$. Além disso a medida de Lebesgue é, a menos duma constante, a única medida de Borel (i.e. sobre $\mathcal{B}$) finita nos compactos e invariante para as translações.

§ 1.15 A construção da medida de Lebesgue pode-se obter como uma consequência do teorema de representação de Riesz que a cada funcional linear positivo Λ, sobre as funções contínuas com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, faz corresponder uma medida finita de Borel μ, tal que

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \qquad (f \in C_c(\mathbb{R}^n)) .$$

Mais precisamente a medida de Lebesgue é a medida associada ao funcional definido pelo integral clássico de Riemann das funções contínuas com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Em particular, este facto implica imediatamente a coincidência do integral de Riemann com o de Lebesgue para estas funções. Pode-se mostrar, em geral, que o integral de Riemann, desde que exista, coincide com o integral de Lebesgue. Contudo, relativamente aos integrais impróprios esta correspondência só é válida se a convergência fôr absoluta. É bem conhecido, por exemplo, que a função

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \notin L^1(\mathbb{R}), \text{ pois } \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \infty, \text{ apesar de } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi .$$

§ 1.16 Um modo essencialmente equivalente à "via funcional" para a construção da medida de Lebesgue (usada em [R]) é a "via abstracta" (ver por exemplo [M] ou [KF]). Esta consiste em começar por definir medida numa família mais pequena de conjuntos (por exemplo nos intervalos semi-abertos) utilizando em seguida o teorema de extensão de medidas de Hahn, ou o de Carathéodory.

Assim por exemplo em $\mathbb{R}$, considerando uma função $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à direita podemos definir uma medida μ_F sobre os intervalos pelas fórmulas:

$$\mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a) \quad , \quad \mu_F([a,b]) = F(b) - F(a-)^{(*)}$$

$$\mu_F(]a,b[) = F(b-)-F(a) \quad e \quad \mu_F([a,b[)=F(b-)-F(a-) \ .$$

Pelo teorema de extensão, esta medida pode ser estendida de uma forma única aos borelianos de $\mathbb{R}$, obtendo-se o que se costuma chamar *a medida de Borel-Stieltjes*

(*) $F(x\pm) = \lim_{y \to x\pm} F(y)$. F é função de distribuição sse $F(-\infty)=0$ e $F(+\infty)=1$, vindo então $F(x)=\mu_F(]-\infty,x])=P[X\leq x]$.

gerada por F. Esta medida pode ainda ser completada relativamente a μ_F, estendendo-se de maneira única à σ-álgebra $\mathcal{L}_F$ que contém os borelianos. A esta medida completa dá-se o nome de *medida de Lebesgue - Stieltjes* gerada por F. No caso particular de ser $F(x) = x$ tem-se a medida de Lebesgue definida sobre a σ-álgebra $\mathcal{L}$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Note-se que, em geral, $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_F$.

A extensão a $\mathbb{R}^n$ pode ser obtida por completação da medida produto da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, ou ainda por um processo directo de extensão, análogo ao caso de uma só dimensão.

§ 1.17 Finalmente, registamos ainda o teorema da mudança de variáveis no integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, o qual é frequentemente utilizado ([R] pág. 185 e [M] pág. 163):

TEOREMA 1.7 Sejam U e Ω dois abertos de $\mathbb{R}^n$ e $T: U \to \Omega$ um difeomorfismo da classe C^1. Para qualquer conjunto mensurável $A \subset U$, e qualquer $f \in L^1(\Omega)$, tem-se

$$\lambda(T(A)) = \int_A |J_T(x)|\,dx$$

$$\int_\Omega f(y)\,dy = \int_U f(T(x))\,|J_T(x)|\,dx\ ,$$

onde $J_T(x)$ indica o Jacobiano da transformação T em x. □

EXERCÍCIOS

I-1) Mostre que a σ-álgebra $\mathcal{B}$ de Borel em $\mathbb{R}$ é gerada pelos intervalos abertos $]a,b[$ ou de modo equivalente por cada um dos intervalos do seguinte tipo: $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[b,+\infty[$, $]b,+\infty[$. Como consequência, conclua que a σ-álgebra $\mathcal{B}^n$ de Borel em $\mathbb{R}^n$ é gerada pelos produtos cartesianos de n intervalos do tipo indicado.

I-2) Prove as propriedades da medida a) a d) do §1.6, pag.7.

I-3) Mostre que se, num espaço de medida completo, duas funções reais f e g forem iguais quase sempre então g é mensurável se f o fôr.

I-4) Usando o teorema da convergência monótona prove o lema de Fatou. Considerando a função $f_n = \chi_A$, para n ímpar, e $f_n = \chi_{A^c}$ para n par, mostre que no lema de Fatou a desigualdade não é supérflua.

I-5) Mostre que numa sucessão não-crescente de funções não-negativas se tem $\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_n f_n\,d\mu$, desde que $f_1 \in L^1(X)$, e que esta condição é essencial.

I-6) Prove a desigualdade de Tchébychev:

$$\mu\{x \in X : \phi(x) \geq \varepsilon > 0\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_X \phi\,d\mu \quad \text{para todo o } \phi \geq 0\ ,$$

e utilise-a para mostrar que se $\int_X |f|\,d\mu = 0$ então $f=0$ quase sempre.

I-7) Mostre que se $f \in L^1$ então

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

tendo-se a igualdade sse existe $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $\alpha f = |f|$ q.s$[\mu]$.

I-8) Prove o teorema da convergência dominada de Lebesgue e mostre que a hipótese dos "f_n serem dominados" é essencial.

I-9) Porque razão em $\mathbb{R}^2$ o teorema de Fubini não se aplica às funções:

a) $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ em $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x=y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$ (sendo μ a medida de Lebesgue em $X=[0,1]$ e ν a medida de contagem em $Y=[0,1]$).

I-10) Calculando os resultados parciais

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \int_{\mathbb{R}_+} \operatorname{sen} x\; e^{-xy}\, dy \ (x>0)\ , \quad \int_0^{2\pi n} \operatorname{sen} x\; e^{-xy}\, dx = \frac{1-e^{-2\pi n y}}{1+y^2}\ ,$$

e utilizando o teorema de Fubini, mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi$.

I-11) Defina uma função $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a medida de Lebesgue--Stieltjes gerada por F tenha as seguintes propriedades:

$$\mu_F(\{0\}) = \frac{1}{2}\ ,\ \mu_F([0,\tfrac{1}{2}]) = 2,\ \mu_F(]-\infty,-\tfrac{1}{2}])=0 \text{ e } \mu_F([1,x[)=2x, \forall x>1\ .$$

I-12) Mostre que se $\int_X f\, d\mu < \infty$ $(f \geq 0)$ a medida ν definida no teorema 1.3 é *absolutamente contínua* relativamente a μ, i.e., $\forall \varepsilon>0\ ,\ \exists \delta>0 : \mu(A)<\delta \Rightarrow \nu(A) = \int_A f\, d\mu < \varepsilon$.

I-13) Mostre que a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é invariante para as rotações.