CAPITULO 2 OS ESPAÇOS L^p

DEFINIÇÃO E DESIGUALDADES BÁSICAS

§ 2.1 Recordemos que um espaço normado é um espaço vectorial munido de uma *norma*, i.e., de uma aplicação não-negativa $\|\cdot\|$ tal que, i) $\|x\|=0$ sse $x=0$, ii) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{C})$. Se em i) $\|x\|=0$ não implicar $x=0$, $\|\cdot\|$ diz-se apenas uma semi-norma. Um espaço normado completo é chamado espaço de Banach. São exemplos bem conhecidos o espaço $\mathbb{R}^n$ com a distância euclideana à origem e o espaço das funções reais contínuas e limitadas com a norma do supremo.

Uma família de espaços de Banach de importância fundamental em Análise são os chamados espaços L^p $(p \geq 1)$ introduzidos essencialmente nos trabalhos de Lebesgue e de Riesz (1907).

Seja (X,μ) um espaço de medida e p um real ≥ 1. Chamaremos L^p o espaço das funções complexas tais que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty .$$

Identifica-se em L^p as funções que são iguais quase sempre em X. De facto os elementos de L^p são classe de equivalência de funções com potência p absolutamente integrável (observe-se que $f=0$ q.s sse $\int_X |f|^p d\mu=0$) .

É claro que se $f \in L^p$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $\alpha f \in L^p$ e da desigualdade

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) ,$$

resulta que se $f,g \in L^p$, também $f+g \in L^p$ e os espaços L^p são espaços vectoriais.

Introduz-se uma norma em L^p definindo-se

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad \text{para } p \geq 1. \tag{2.1}$$

O caso limite $p=\infty$ corresponde às funções mensuráveis que são *essencialmente limitadas* em X, isto é, aquelas para as quais existe uma constante C tal que $|f| \leq C$ q.s.X. O ínfimo dessas constantes C é chamado o supremo essencial da função f e indica-se por

$$(2.2) \qquad \| f \|_{\infty} = \sup_{x\in X} \text{ess} \, |f(x)| \, .$$

É fácil verificar que $\| \cdot \|_{\infty}$ é uma norma no espaço vectorial L^{∞} das funções essencialmente limitadas (mais uma vez se identificam as funções que são iguais q.s., pois de outro modo apenas se teria uma semi-norma).

§ 2.2 Das definições introduzidas vê-se facilmente que os espaços L^p são espaços normados para $1\leq p\leq\infty$. No entanto, excepto nos casos limites $p=1$ e $p=\infty$, a propriedade ii) sobre a sublinearidade da aplicação $\| \cdot \|_p$ para $1<p<\infty$ não é imediata e é conhecida pela desigualdade de Minkowski. Esta pode deduzir-se facilmente duma outra desigualdade básica, a desigualdade de Hölder. Antes de as introduzirmos, consideremos, para $1<p<\infty$, o expoente q, dito *conjugado* de p, e definido pela relação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, ,$$

a qual implica $q=p/(p-1)>1$ e contém o caso particular importante $p=q=2$.

TEOREMA 2.1 (Desigualdade de Hölder) Se $1<p<\infty$ e $f\in L^p$, $g\in L^q$, então $fg\in L^1$ e

$$(2.3) \qquad \int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Dem: A função $\phi(t)=(t^p/p)+(1/q)-t$ tem para $t\geq 0$, um mínimo (estrito) apenas em $t=1$, mínimo este que é zero. Pondo $t=ab^{-q/p}$, conclui-se que

$$(2.4) \qquad ab\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, , \quad \forall a,b\geq 0 \quad \text{(desigualdade de Young)},$$

sendo a igualdade verificada sse $a^p= b^q$.

A desigualdade (2.3) resulta em geral de (2.4) pondo $a=|f(x)|/\|f\|_p$, $b=|g(x)|/\|g\|_q$ e integrando em X. $\square$

Observemos que desta demonstração resulta que a igualdade em (2.3) é verificada sse $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^q$ são quase sempre proporcionais.

Um caso importante da desigualdade de Holder é o caso em que $X=\mathbb{N}$ e μ é a medida de contagem — neste caso (2.3) assume a forma duma soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q)^{1/q} \, ,$$

e o espaço $L^p(\mathbb{N})$ costuma indicar-se por ℓ^p.

§ 2.3 Note-se ainda que a desigualdade de Hölder é ainda válida nos casos limites $p=1$ e $q=\infty$ ou $p=\infty$ e $q=1$, o mesmo acontecendo com o teorema seguinte:

TEOREMA 2.2 (Desigualdade de Minkowski) Se $1<p<\infty$ então

(2.5) $$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Dem: Aplicando duas vezes a desigualdade de Hölder tem-se

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) \, d\mu$$

$$\leq \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q}(\|f\|_p + \|g\|_p) \, ,$$

e (2.5) resulta por divisão no caso de ser $\|f+g\|_p<\infty$ ou trivialmente no caso de nem f nem g pertencerem a L^p. □

L^p É COMPLETO

§ 2.4 Tendo sido provado que L^p é um espaço normado, passamos agora a mostrar que é completo enquanto espaço métrico, i.e., toda a sucessão de Cauchy em L^p(i.e., $\forall\varepsilon>0 \, \exists N: n,m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p<\varepsilon$) converge em norma para um elemento de L^p.

TEOREMA 2.3 L^p é um espaço de Banach para $1\leq p\leq\infty$.

Dem: Comecemos pelo caso mais simples, i.e., $p=\infty$: se f_n é uma sucessão de Cauchy em L^∞, então existe um conjunto $A\subset X$, com $\mu(A)=0$, tal que se $x\notin A$ então para todo o n e m vem

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \quad , \quad |f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \, . \qquad (*)$$

(*) A é a união dos $\{x \mid f_n(x)>\|f_n\|_\infty\}$ e dos $\{x \mid |f_n(x)-f_m(x)|>\|f_n - f_m\|_\infty\}$

como $\{\|f_n\|_\infty\}$ é limitada em $\mathbb{R}$, tem-se que f_n converge uniformemente no complementar de A para uma função limitada f, pondo $f(x)=0$ se $x\in A$, resulta $f\in L^\infty$ e $\|f_n - f\|_\infty\to 0$ e, portanto, L^∞ é completo.

Consideremos agora o caso $1\leq p<\infty$ e tomemos uma sucessão de Cauchy em L^p. Então existe uma subsucessão que, após um arranjo dos índices, indicaremos por $\{f_j\}$ e é tal que

$$\|f_{j+1} - f_j\|_p \leq \frac{1}{2^j} \, , \; j\in\mathbb{N}$$

Pondo $g_m(x) = \sum_{j=1}^{m} |f_{j+1}(x) - f_j(x)|$, vem

$$\|g_m\|_p \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j} <1 \quad , \quad \forall m\in\mathbb{N} \, .$$

Aplicando o lema de Fatou obtemos

$$\int_X (\lim_{m\to\infty}|g_m|)^p \, d\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |g_m|^p \, d\mu \leq 1$$

donde resulta $g(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) <\infty$ q.s. em X. Então a série

$$f_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [f_{j+1}(x)-f_j(x)]$$

é absolutamente convergente para um valor $f(x)$, em quase todo o $x\in X$. Pondo $f(x)=0$ no conjunto de pontos (de medida nula) onde a série não converge, tem-se

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} \{f_1(x) - \sum_{j=1}^{m} [f_{j+1}(x)-f_j(x)]\} = f(x), \text{ q.s.}$$

Resta ver que f é o limite em L^p da sucessão de Cauchy. Ora para qualquer $\varepsilon>0$, existe N tal que $\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon$ para todos os $m,n>N$. De novo pelo lema de Fatou, tem-se

$$\int_X |f-f_n|^p\, d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} |f_m-f_n|^p\, d\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int_X |f_m-f_n|^p\, d\mu \le \varepsilon^p$$

para todo $n>N$. Então $f=(f-f_n)+f_n\varepsilon L^p$ e $\|f-f_n\|_p\to 0$ quando $n\to\infty$ e conclui-se que L^p é completo. ▯

Na demonstração deste teorema construiu-se uma subsucessão de funções convergindo pontualmente quase sempre para uma função de L^p. Este resultado é intrinsecamente interessante, pelo que se costuma enunciar em separado:

PROPOSIÇÃO 2.1 Se f_n é uma sucessão de Cauchy em L^p $(1\le p\le\infty)$ tendo f por limite, então existe uma subsucessão que converge pontualmente quase sempre para $f(x)$. ▯

APROXIMAÇÃO EM L^p

§ 2.5 Já referimos a importância que as funções simples têm na construção do integral de Lebesgue. Vamos agora ver que toda a função L^p pode ser aproximada nesse espaço por funções simples. Indicando por S a classe das funções simples (mensuráveis) complexas temos o seguinte teorema:

TEOREMA 2.4 O subespaço $S\cap L^p$ é denso em L^p $(1\le p\le\infty)$.

Dem. Usando a habitual decomposição em parte real e imaginária, seguida da decomposição de cada uma destas em parte positiva e negativa podemo-nos reduzir à aproximação das funções não negativas. Seja então $0\le f\varepsilon L^p$ e considere-se

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{m}{n} & \text{se } x\varepsilon\left[\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}\right], \ m=0,1,2,\dots,n^2-1 \\ n & \text{se } x\varepsilon[f(x)\ge n]. \end{cases}$$

É imediato que $0\le s_n\le f$, $s_n\varepsilon S\cap L^p$ e que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ quase sempre. No caso $p=\infty$, como se tem $\|f-s_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$, para n suficientemente grande, a demonstração do teorema é trivial. Para $1\le p<\infty$, a conclusão resulta facilmente do teorema da convergência dominada de Lebesgue, uma vez que se têm $|f-s_n|^p\le|f|^p$ e, portanto,

$$\|f-s_n\|_p \to 0 \quad \text{quando } n\to\infty. \qquad ▯$$

§ 2.6 Até agora temos considerado $L^p = L^p(X,\mu)$ num qualquer espaço de medida. Considerando em X uma topologia e uma medida apropriadas podemos aproximar as funções de L^p por funções contínuas. Antes enunciamos um resultado importante sobre a relação entre as funções contínuas e as mensuráveis.

TEOREMA 2.5 (LUSIN) Seja f uma função complexa mensurável definida num espaço de Hausdorff localmente compacto X, no qual se definiu uma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ que contém os borelianos e uma medida μ regular e finita nos compactos de X. Seja $A\in\mathfrak{S}$, $\mu(A)<\infty$ tal que $f=0$ em A^c. Então para todo o $\varepsilon>0$, existe uma função $g\in C_c(X)$ tal que (*)

$$\sup_{x\in X}|g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| \quad \text{e} \quad \mu(\{x|f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon. \qquad \Box$$

Este teorema, cuja demonstração se pode encontrar em [R,p.56], é válido, em particular, no caso em que X é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e μ a medida de Lebesgue, o qual fornece um exemplo do teorema seguinte.

TEOREMA 2.6 Nas condições do teorema de Lusin, $C_c(X)$ é denso em $L^p(X)$, para $1\leq p<\infty$.

Dem: Seja $\varepsilon>0$ arbitrário. Pelo teorema 2.4, para todo $f\in L^p$ existe $s\in S\cap L^p$, tal que

$$\|f-s\|_p \leq \varepsilon/2 .$$

Por outro lado, como s é simples e $p<\infty$ se $A=\text{supp } s$, virá $\mu(A)<\infty$, e, pelo teorema de Lusin, existe uma função $g\in C_c(X)$ tal que $g(x)=s(x)$ a menos de um con-

---

(*) $C_c(X)$ indica o espaço das funções contínuas com suporte compacto
supp $g = \{x : g(x)\neq 0\}$

junto B de medida $\delta\leq(\varepsilon/4\|s\|_\infty)^p$ e $|g|\leq\|s\|_\infty$.

Então, tem-se

$$\|s-g\|_p = \left(\int_B |s-g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq 2\|s\|_\infty \mu(B)^{1/p} \leq \varepsilon/2$$

e, portanto, $\|f-g\|_p\leq\varepsilon$, o que prova a densidade de $C_c(X)$ em $L^p(X)$. $\Box$

Consideremos de novo o caso mais usual das aplicações em que $X=\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Este teorema, no caso $1\leq p<\infty$, ao dizer-nos que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ e sendo este espaço completo, permite concluir que $L^p(\Omega)$ é o completado do espaço métrico que se obtém ao introduzir a norma $\|.\|_p$ em $C_c(\Omega)$. Em particular, isto mostra que o integral de Lebesgue é a extensão natural do integral de Riemann.

No entanto, o caso $p=\infty$ é substancialmente diferente, pois o completado de $C_c(\Omega)$ relativamente à norma $\|.\|_\infty$ não é $L^\infty(\Omega)$ mas sim $C_0(\Omega)$ o espaço de todas as funções contínuas que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ e no finito, no caso de Ω ser ilimitado.

§ 2.7 Uma consequência directa da aproximação em $L^p(\Omega)$ é a separabilidade deste espaço para $1\leq p<\infty$. Recordemos que um espaço normado diz-se *separável* se tem um subconjunto numerável denso. Em particular, recorde-se que o espaço $C(\overline{\Omega})$ das funções complexas contínuas em $\overline{\Omega}$ é separável se

Ω fôr limitado. Isto é uma consequência do bem conhecido *teorema de Stone-Weierstrass*:

TEOREMA 2.7 Se Ω é limitado em $\mathbb{R}^n$, então o conjunto P de todos os polinômios em $x=(x_1,\ldots,x_n)$ com coeficientes racionais complexos (i.e. em $Q+iQ$) é denso em $C(\overline{\Omega})$. $\square$

TEOREMA 2.8 $L^p(\Omega)$ é separável para $1\leq p<\infty$ e para qualquer aberto Ω de $\mathbb{R}^n$.

Dem. Consideremos a família de compactos de Ω $(m=1,2,\ldots)$

$$\overline{\Omega}_m = \{x\in\Omega : d(x,\partial\Omega)\geq \frac{1}{m} \quad e \quad |x|\leq m\},$$

sendo χ_m as respectivas funções características.

Pelo teorema de Stone-Weierstrass, $P_m=\{\chi_m h: h\in P\}$ é denso em $C(\overline{\Omega}_m)$, tendo-se que $\bigcup_{m=1} P_m$ é numerável. Vamos mostrar que este conjunto é denso em $L^p(\Omega)$, o que demonstrará o teorema. Para $f\in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon>0$, pelo teorema 2.6 existe $g\in C_c(\Omega)$, tal que $\|f-g\|_p\leq\varepsilon/2$. Por outro lado, se $1/m<d(\text{supp } g,\partial\Omega)$, existe $h\in P_m$, tal que

$$\|g-h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}\left[\mu(\overline{\Omega}_m)\right]^{-1/p}.$$

Então, conclui-se

$$\|f-h\|_p\leq\|f-g\|_p+\|g-h\|_p\leq\varepsilon/2+\|g-h\|_\infty(\mu(\overline{\Omega}_m))^{1/p}\leq\varepsilon. \square$$

A separabilidade de $L^p(X,\mu)$ é ainda extensível, sempre no caso $1\leq p<\infty$, para conjuntos quaisquer X desde que a medida μ tenha uma base numerável (veja-se [KF] pags. 421 e 422), que é naturalmente o caso de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado, mesmo para $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, o espaço $L^\infty=L^\infty(\Omega)$ não é separável.

CONVOLUÇÃO E REGULARIZAÇÃO EM $L^p(\mathbb{R}^N)$

§ 2.8 Uma outra maneira de aproximar as funções de $L^p(\Omega)$ $1\leq p<\infty$ é fazer a convolução com funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, ditas funções regularizantes. A introdução do produto de convolução parece dever-se a Tchebychef em 1890 num trabalho relativo às probabilidades.

TEOREMA 2.9 Sejam $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. A *convolução* $f*g$ definida para quase todo o $y\in\mathbb{R}^n$ por

$$(f*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dx, \quad (*) \tag{2.6}$$

está ainda em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $1\leq p<\infty$ e $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, então

$$\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p. \tag{2.7}$$

(*) Aqui e no futuro indicamos por dx a integração relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ $(dx=dx_1\ldots dx_n)$. Note-se que $f*g=g*f$.

Dem. É essencialmente uma aplicação do teorema de Fubini, pois integrando $|f(x)||g(y-x)|$ primeiro em y e depois em x, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(y)|dy \le \int_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x)|\int_{\mathbb{R}^n}|g(y-x)|dy\right)dx = \|g\|_1\|f\|_1$$

uma vez que a norma L^1 é invariante para as translações i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(y-x)|dy = \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy \quad \text{para quase todo o } x\in\mathbb{R}^n .$$

Para demonstrar (2.7) para $p>1$, considere-se o seu expoente conjugado $q=p/(p-1)$. Da desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{1/p}|g(y-x)||f(x)|^{1/q}dx \le$$

$$\le \left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||g(y-x)|^p dx\right]^{1/p} . \left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\right]^{1/q}$$

conclui-se, não só que $f*g$ está definido para quase todo $y\in\mathbb{R}^n$, como também que

$$|(f*g)(y)|^p \le \left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||g(y-x)|^p dx\right]\|f\|_1^{p/q} .$$

Integrando e usando mais uma vez Fubini, tem-se

$$\|f*g\|_p^p \le \|f\|_1\left[\int_{\mathbb{R}^n}|g(y-x)|^p dy\right]\|f\|_1^{p/q} = \|f\|_1^p\|g\|_p^p$$

dado que a norma de L^p também é invariante para as translações. □

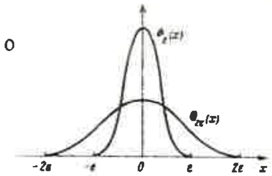
§ 2.9 Seja θ uma função real, não-negativa, de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e verificando as propriedades seguintes:

i) $\theta(x)=0$ se $|x|\ge 1$ (*) , ii) $\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x)dx = 1$.

Um exemplo, bem conhecido, é a "função sino"

$$\theta(x) = \begin{cases} K \exp[-1/(1-|x|^2)] , & \text{se } |x|\le 1 \\ 0 , & \text{se } |x| \ge 1 \end{cases}$$

sendo $K>0$ determinada pela condição de normalização ii). Para $\varepsilon>0$, arbitrário a função



$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

está em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pois supp $\theta_\varepsilon \subset \{x : |x|\le\varepsilon\}$, e verifica a condição ii) de normalização. A um tal θ_ε chama-se *regularizador* ou *função regularizante* ("mollifier") e à convolução

(2.8) $$f_\varepsilon(x)=(f*\theta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\theta_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

(*) A função θ tem, pois, suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, portanto $\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

chamamos uma *regularização* de f. É claro que (2.8) só faz sentido para as funções de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, i.e., para as funções localmente integráveis(*). As propriedades da regularização resumem-se no

TEOREMA 2.10 Seja f uma função definida num aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, e considere-se a extensão de f a $\mathbb{R}^n$ por zero.

(a) Se $f \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})$, então $f_\varepsilon = f * \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Se além disso o suporte de f for compacto em Ω, então $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo $\varepsilon < d(\text{supp } f, \partial\Omega)$.

(c) Se $f \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, então $f_\varepsilon \in L^p(\Omega)$, $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0$.

(d) Se $f \in C(\Omega)$ tem-se que $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformemente em todo o compacto $K \subset \Omega$.

Dem: Como a função $\theta_\varepsilon(x-y)$ é infinitamente derivável em x e se anula para $|x-y| \geq \varepsilon$, uma vez que podemos trocar uma qualquer derivação parcial de qualquer ordem em x (indicada por D_x) com a integração e, atendendo que, por hipótese, a função f é integrável nos compactos de R^n, tem-se

$$D_x(f * \theta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x \theta_\varepsilon(x-y) f(y) dy ,$$

(*) Se Ω é um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, diz-se que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sse $f \in L^1(A)$, para todo o aberto limitado A tal que $\bar{A} \subset \Omega$.

donde se conclui facilmente (a) e (b) (ver ex.s II-2 e 3).

A primeira parte de (c) resulta imediatamente do teorema 2.9 uma vez que $\|\theta_\varepsilon\|_1 = 1$, por construção de θ_ε. A convergência de $f_\varepsilon \to f$ em $L^p(\Omega)$ resulta de (d), que começamos por provar.

Se $f \in C(\Omega)$, temos

$$|(f*\theta_\varepsilon)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(x-y)[f(y)-f(x)] dy \right| \leq \sup_{|y-x|<\varepsilon} |f(y)-f(x)| ,$$

e pela continuidade uniforme de f no compacto $K \subset \Omega$, a quantidade da direita tende para zero quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $x \in K$, e (d) está demonstrado.

Pela densidade de $C_c(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $\delta > 0$ e $f \in L^p(\Omega)$ existe $g \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f-g\|_p \leq \delta/3$. Então

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \delta$$

uma vez que

$$\|f * \theta_\varepsilon - g * \theta_\varepsilon\|_p = \|(f-g)*\theta_\varepsilon\|_p \leq \|f-g\|_p \leq \delta/3 ,$$

e, como $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g$ uniformemente e g tem suporte compacto, para ε suficientemente pequeno, o suporte de g_ε é vizinho do de g, vem

$$\|g_\varepsilon - g\|_p \leq \delta/3 ,$$

provando o que faltava demonstrar. $\square$

§ 2.10 Como corolário do teorema anterior, usando mais uma vez o teorema 2.6 é fácil concluir o importante resultado seguinte:

TEOREMA 2.11 $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$ e todo o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

Um outro resultado importante que também pode ser obtido usando o teorema 2.10 é o teorema seguinte (ver exercício II-11).

TEOREMA 2.11 Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, e

$$\int_\Omega f\phi \, dx = 0 \quad , \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \; ,$$

então $f=0$ para quase todo o $x \in \Omega$. $\square$

L^2 É UM ESPAÇO DE HILBERT (Revisões)

§ 2.11 Consideremos agora o caso especial de $L^2 = L^2(X,\mu)$ o qual é a realização clássica dum espaço de Hilbert. Com efeito, tem-se um *produto interno*, pondo

$$(2.9) \qquad (f,g) = \int_X f\bar{g} \, d\mu \, ,^{(*)}$$

(*) A barra representa o complexo conjugado.

i.e., $(.,.): L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear definida positiva (i.e., $(f,g) = \overline{(g,f)}$; $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; e $(f,f) \geq 0$ sendo nulo sse $f=0$), e pelo teorema 2.3 tem-se que L^2 é completo para $\|f\| \equiv \sqrt{(f,f)} = \|f\|_2$.

Recordemos que, em qualquer espaço vectorial dotado dum produto interno, são válidas as desigualdades de Cauchy--Schwarz e triangular, respectivamente:

$$|(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\|$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \, ,$$

que no caso de L^2 se reduzem à desigualdade de Hölder (para $p=2$) e à de Minkowsky.

§ 2.12 Da desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta imediatamente que, em qualquer espaço de Hilbert H, a aplicação $f \to (f,g)$ é, para cada $g \in H$, um funcional linear contínuo sobre H. Um resultado fundamental que importa recordar e se deve a Riesz (1934), é o facto que *todos* os funcionais lineares contínuos sobre H (o conjunto destes constitui o dual H' de H) serem daquele tipo. No caso particular de $H = L^2(0,1)$, o resultado havia sido já provado em 1907, independentemente por Riesz e Fréchet.

TEOREMA 2.13 (Riesz) Se $\Lambda \in H'$, dual dum espaço de Hilbert H, então existe $g \in H$, único, tal que

(2.10) $\Lambda f=(f,g)$, para todo $f\in H$,

Além disso a aplicação $i:H\ni g \leftrightarrow \Lambda\in H'$, assim definida é um anti-isomorfismo que preserva a norma (isometria) . $\square$

Sendo, por definição, a norma de $\Lambda\in H'$ dada por

$$\|\Lambda\|_*=\sup_{\|f\|=1}|\Lambda(f)|,$$

pela isometria do teorema de Riesz, tem-se que

$\|\Lambda_j\|_*=\|g_j\|$, $(\Lambda_1,\Lambda_2)_*=(g_1,g_2)$, se $\Lambda_j=i(g_j)$ para $j=1,2$.

No caso de ser $H=L^2$, a representação (2.10) reduz-se a

$$\Lambda f=\int_X f\bar{g}\,d\mu \quad , \quad \text{com } \|\Lambda\|_*=\|g\|_2 \ ,$$

e, identificando Λ com o seu representante g, dado que $(L^2)'\simeq L^2$, costuma-se afirmar que o dual de L^2 é o próprio L^2.

§ 2.13 Nos espaços de Hilbert os *conjuntos ortonormados* (o.n. ,i.e. formados por elementos ortogonais dois a dois: $f\perp g \Leftrightarrow (f,g)=0$ e normalizados: $\|f\|=1$) desempenham um papel fundamental:

TEOREMA 2.14 Se $\{e_j\}$ é um conjunto o.n. dum espaço de Hilbert, então as seguintes condições são equivalentes entre si:

(a) $\{e_j\}$ é completo (i.e., não existe outro conj. o.n. contendo-o estritamente),

(b) $\{e_j\}$ é fechado (i.e., o espaço vectorial gerado por $\{e_j\}$ é denso em H);

(c) se $f\perp e_j$, para todo o j, então $f=0$;

(d) $f=\sum_j (f,e_j)e_j$, $\forall f\in H$;

(e) $(f,g)=\sum_j (f,e_j)(e_j,g)$, $\forall f,g\in H$.

(f) $\|f\|^2=\sum_j |(f,e_j)|^2$, $\forall f\in H$ (identidade de Parseval) $\square$.

A condição (a) sugere o nome de *base o.n.* para um conjunto ortonormado completo, e tal como as relações (d) e (f) justificam o nome de *coeficientes de Fourier* de f para os números $c_j=(f,e_j)$.

A classe dos espaços de Hilbert com mais interesse são os separáveis (*). Já mostrámos que o espaço $L^2(\Omega)$, (Ω aberto de $\mathbb{R}^n$) com a medida de Lebesgue é separável. Um outro exemplo é o espaço $\ell^2=L^2(\mathbb{N})$ com a medida de contagem, o qual se reduz a

$$\ell^2=\{(a_1,a_2,\ldots,a_m,\ldots):a_m\in\mathbb{C},m\in\mathbb{N} \text{ e } \sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2<\infty\}$$

Tem-se então o seguinte teorema de Riesz-Fischer

(*) É por isso que certos autores exigem esta condição na definição do espaço de Hilbert (veja-se por ex. [KF]).

TEOREMA 2.15 Um espaço de Hilbert H é separável sse existe uma base o.n. no máximo numerável. Neste caso existe uma isometria entre H e ℓ^2, ou seja, todos os espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são isomorfos entre si. $\square$

§ 2.14 O exemplo básico, que forneceu a terminologia usada no quadro abstracto dos espaços de Hilbert, provem da teoria clássica das *séries de Fourier*: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ o intervalo $]a,b[$ e consideram-se em $L^2(\Omega)=L^2(a,b)$ a sucessão de funções $\{e^{in\omega x}/\sqrt{T}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $T=b-a$ e $\omega=2\pi/T$; é fácil verificar que formam um conjunto o.n.; por outro lado, usando resultados clássicos de análise (por exemplo, o teorema de Weierstrass ou o de Fejér sobre a aproximação uniforme de uma função contínua periódica por polinómios trigonométricos) não é difícil mostrar que aquela sucessão é fechada e, pelo teorema 2.14, tem-se que aquelas funções formam uma base de $L^2(a,b)$; portanto para $f\in L^2(a,b)$, vem

$$(2.11) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{T}} e^{in\omega x}, \quad \text{q.t. } x\in]a,b[,$$

com as expressões usuais os coeficientes de Fourier

$$c_n = (f, e^{in\omega x}/\sqrt{T}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^b f(x) e^{-in\omega x}\, dx \ (*)$$

(*) A fórmula clássica da série de Fourier : $f=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$ resulta de (2.11) com $a_o=c_o/\sqrt{T}$, $a_n=(c_n+c_{-n})/\sqrt{T}$ e $b_n=i(c_n-c_{-n})/\sqrt{T}$.

Observe-se que o desenvolvimento de Fourier (2.11) tem sentido em $L^2(a,b)$ e que a convergência pontual da série de Fourier requer condições suplementares sobre a função f.

Só em 1965 é que foi resolvido por L. Carleson o problema, aberto durante cerca de cinquenta anos, da convergência em quase todo o ponto x das somas parciais da série de Fourier (2.11) para f(x), desde que $f\in L^2(a,b)$.

Vários conjuntos o.n. são importantes em Análise e podem ser obtidos a partir de funções elementares aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. São exemplo:

- os *polinómios de Legendre* obtidos a partir das funções x^n $(n=0,1,2,\dots,)$ em $L^2(-1,1)$;
- as *funções de Hermite* : $x^n e^{-x^2/2}$ $(n=0,1,2,\dots)$ em $L^2(\mathbb{R})$,
- as *funções de Laguerre* : $x^n e^{-x}$ $(n=0,1,2,\dots)$ em $L^2(0,\infty)$

Se $\{e_j(x)\}$ e $\{e_k(y)\}$ são bases o.n., respectivamente de $L^2(X)$ e $L^2(Y)$, o conjunto de todos os produtos $e_{jk}(x,y)=e_j(x)e_k(y)$ forma uma base o.n. de $L^2(X\times Y)$, o que conduz às séries múltiplas de Fourier (ver [KF], pg. 440).

As demonstrações dos teoremas enunciados nesta revisão podem ser encontradas, por exemplo, em qualquer dos livros [R], [KF], [Y] ou [RN].

EXERCÍCIOS

II.1) Mostre que, se $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f_a(x)=f(x-a)$, $a\in\mathbb{R}^n$ então $f_a\in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_p=\|f_a\|_p$, para $p\geq 1$.

II.2) Seja Y um espaço métrico e $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ tal que (i) a aplicação $f_y:x\mapsto f(x,y)$ para cada $y\in Y$, está em $L^1(X,\mu)$, ii) para q.t. $x\in X$, $y\mapsto f(x,y)$ é contínua, e iii) existe $g\in L^1(X,\mu)$ tal que $|f(x,y)|\leq g(x)$, para q.t. $x\in X$.

Mostre que a função

$$F(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x) \quad \text{é contínua em } Y.$$

II.3) Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f:X\times\Omega\to\mathbb{C}$ tal que

i) para cada y, a aplicação $x\mapsto f(x,y)$ está em $L^1(X,\mu)$

ii) para q.t. x, $f_x:y\mapsto f(x,y)$ é uma função continuamente diferenciável em y;

iii) a derivada parcial $D_{y_i}f(x,y)\in L^1(X,\mu)$ para todo o $y\in\Omega$ e existe $g\in L^1(X,\mu)$ tal que $|D_{y_i}f(x,y)|\leq g(x)$, para todo o $y\in\Omega$ e quase todo o $x\in X$.

Então a aplicação F do exercício anterior é continuamente derivável em y_i e tem-se

$$D_{y_i}F(y) = \int_X D_{y_i}f(x,y)d\mu(x).$$

(esta é a fórmula de derivação sob o integral de Lebesque).

II-4) b) Mostre que, se $\mu(X)<\infty$ e $1\leq p\leq q\leq\infty$, vale a inclusão $L^q\hookrightarrow L^p$, mais precisamente é válida a desigualdade

$$\|f\|_p\leq[\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q .$$

II-4a) Mostre a seguinte extensão de desigualdade de Hölder

$$\|fg\|_r\leq\|f\|_p\,\|g\|_q \quad \text{para} \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

e $1\leq r,p,q\leq\infty$.

II.5) $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$ para $1\leq p\leq\infty$ e todo o aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

II.6) Se $f\in L^p$, então $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

II.7) Se existe uma constante K tal que se tem $\|f\|_p\leq K$ para todo $1\leq p<\infty$, então $f\in L^\infty$ e $\|f\|_\infty\leq K$.

II.8) Seja uma sucessão $f_n\xrightarrow[q.s.]{} f$, tal que $|f_n(x)|\leq g(x)$, q.t. x para um certo $g\in L^p$. Mostre que $f\in L^p$ e $f_n\to f$ em L^p.

II.9) Seja, para $1<p<\infty$ e para $g\in L^q$ $(q=\frac{p}{p-1})$, $\Lambda:L^p\to\mathbb{C}$ o funcional definido por $\Lambda(f)=\int_X fg\,d\mu$. Mostre que $\|\Lambda\|_*=\|g\|_q$.

II.10) Mostre que a convolução é bilinear comutativa e associativa.

II.11) Demonstre o teorema 2.12 (sugestão use o teorema 1.2 (g) regularizando a função característica dum conjunto mensurável limitado arbitrário $A, \bar{A} \subset \Omega$).

II.12) a) Num espaço de Hilbert H, diz-se que f_n converge fracamente para f ($f_n \rightharpoonup f$) sse $(f_n, g) \to (f, g)$, $\forall g \in H$. Mostre que se também $\|f_n\| \to \|f\|$ então $f_n \to f$ fortemente em H (i.e. em norma).

b) Se $H = L^2$, seja $A, A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ uma sucessão de conjuntos num espaço X, $\mu(X) < \infty$. Mostre que se $\chi(A_n) \rightharpoonup \chi(A)$ então $\chi(A_n) \to \chi(A)$.

II.13) Desigualdade de Young para a convolução: Se $f \in L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q$, $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$, mostre que se tem

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \; , \; \text{com } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} \ge 0 \; ,$$

(Sugestão: aplique a desigualdade de Hölder para os 3 espoentes 1, $p/(r-p)$ e $q/(r-q)$ em (onde $g_x(y) = g(x-y)$)

$$|f * g(x)|^r \le \| \, |f|^p |g_x|^q . |f|^{r-p} . |g_x|^{r-q} \|_{1/r}$$

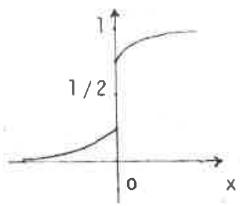
e discuta o caso de algum expoente ser $+\infty$ separadamente).

CAPITULO 3 DECOMPOSIÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE MEDIDAS

INTRODUÇAO

§ 3.1 Consideremos, da teoria elementar das Probabilidades, o seguinte exemplo de função de distribuição sobre os reais:

(3.1) $$F(x) = \frac{1}{2} F_a(x) + \frac{1}{2} F_d(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \text{ onde}$$



$$F_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \text{ e}$$

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases} ,$$