FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Exame de Topologia

2023.01.07

1. Seja X um espaço métrico.
   Discuta as seguintes implicações
   a) X compacto $\Rightarrow$ X completo
   b) X completo $\Rightarrow$ X compacto

2. Enuncie a propriedade de Baire

3. Descreva o conceito de espaço topológico quociente.

4. Prove que não existe um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$ cuja norma associada seja $(x,y) \mapsto |x| + 2|y|$

5. Apresente um exemplo de espaço topológico conexo X e um ponto $P \in X$ tal que $X \setminus \{P\}$ tenha três componentes conexas

① a) Um espaço métrico compacto é completo.

demonstração: seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X. Pela compacidade de X, existe uma subsucessão convergente. Mas uma sucessão de Cauchy que possui uma subsucessão convergente é convergente, o que conclui a demonstração

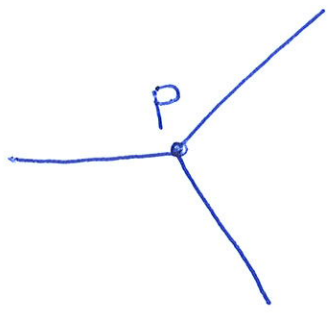
b) Existem espaços métricos completos que não são compactos; por ~~exem~~ exemplo $\mathbb{R}$ com a topologia Euclidiana

---

② Num espaço métrico completo, a intersecção duma família contável de conjuntos gordos é ~~gorda~~ densa. Chamamos a um conjunto "gordo" se for aberto e denso.

---

⑤



(4) Uma norma proveniente dum produto interno tem que satisfazer a "identidade do paralelogramo":

$$\|p+q\|^2 + \|p-q\|^2 = 2\|p\|^2 + 2\|q\|^2$$

A norma $|x|+2|y|$ não satisfaz esta identidade. Escolhendo, por exemplo, $p=(1,0)$, $q=(0,1)$, temos

$$\|p+q\|^2 = \|(1,1)\|^2 = (1+2)^2 = 9$$

$$\|p-q\|^2 = \|(1,-1)\|^2 = (1+2)^2 = 9$$

$$\|p\|^2 = \|(1,0)\|^2 = 1^2 = 1$$

$$\|q\|^2 = \|(0,1)\|^2 = 2^2 = 4$$

(3) Seja X um espaço topológico e seja $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Consideramos $Y = X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência e $\pi : X \to Y$ a projecção canónica (que associa a cada $x \in X$ a sua classe de equivalência). Consideramos, sobre o conjunto Y, a topologia transportada através de π, isto é, a mais fina topologia sobre Y que mantém π contínua. Por outras palavras:

$B \subset Y$ aberto $\iff$ $\pi^{-1}(B)$ aberto em X