FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Exame de TOPOLOGIA

2023.01.26

1. Apresente diferentes definições de "espaço compacto" e as relações lógicas entre elas.

2. Apresente uma topologia sobre $\mathbb{Z}$ que o torne espaço conexo.

3. No espaço métrico $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, calcule a distância entre as classes de equivalência de $A(0,0)$ e $B(1.2, 0.8)$

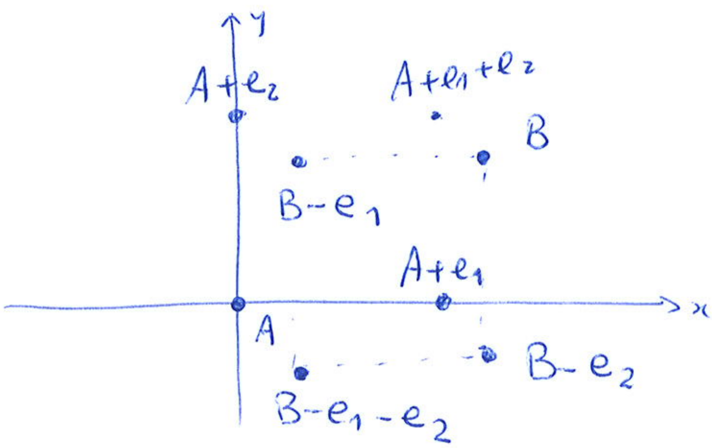
4. Seja X um espaço topológico compacto. Prove que cada componente conexa de X é compacta.

5. Seja (X,d) um espaço métrico, e seja $A \subset X$. Prove que o conjunto $\{x \in X : \text{dist}(x,A) < 1\}$ é aberto. Prove que o conjunto $\{x \in X : \text{dist}(x,A) \leq 1\}$ é fechado.

(2) $\mathbb{Z}$ com a topologia indiscreta (em que os únicos abertos são $\emptyset$ e $\mathbb{Z}$) é conexo. Qualquer conjunto munido da topologia indiscreta é conexo.

Um exemplo menos trivial é a topologia co-finita (em que os fechados, para além do próprio $\mathbb{Z}$, são os subconjuntos finitos).

(3)



$$d(A,B) = \sqrt{1,44+0,64} = \sqrt{2,08}$$

$$d(A+e_1, B) = d(A, B-e_1) = \sqrt{0,04+0,64} = \sqrt{0,64}$$

$$d(A+e_2, B-e_1) = d(A, B-e_1-e_2) = \sqrt{0,04+0,04} = \sqrt{0,08}$$

$$d(A, B-2e_1) = \sqrt{0,64+0,64} = \sqrt{1,28}$$

$$d(A+e_1, B-e_1-e_2) = \sqrt{0,64+0,04} = \sqrt{0,64}$$

As outras distâncias são maiores, portanto

$$\hat{d}(\hat{A},\hat{B}) = d(A+e_2, B-e_1) = \sqrt{0,08} = 0.2\sqrt{2}$$

(4) Uma componente conexa dum espaço topológico é simultaneamente aberta e fechada. Um subconjunto fechado dum espaço compacto é compacto, o que conclui a demonstração

(5) Seja $A \subset X$ e seja $x \in X$ com $\text{dist}(x,A) < 1$. Queremos provar que existe uma vizinhança V de x tal que $\forall y \in V, \ d(y,A) < 1$

Seja $0 < \varepsilon < 1 - \text{dist}(x,A)$.
Seja V a bola aberta de centro x e raio ε.
Seja $y \in V$; temos que $d(x,y) < \varepsilon$

~~Então dist(y,A) ≤ dist(x,y) + d(~~

Então $\text{dist}(y,A) \leq d(y,x) + \text{dist}(x,A) < 1$
o que conclui a demonstração.

Para provar que $\{x \in X : \text{dist}(x,A) \leq 1\}$ é fechado basta provar que $\{x \in X : \text{dist}(x,A) > 1\}$ é aberto.
A demonstração segue a mesma linha.