1 – Complementos de cálculo vetorial e tensorial

1.1. Variáveis escalares, vetoriais e tensoriais

Os sistemas físicos são caracterizados por certas grandezas intrínsecas (extensivas ou intensivas, conforme sejam proporcionais ou não à quantidade de matéria do sistema). Essas grandezas têm em geral dimensões físicas num certo sistema fundamental e coerente de unidades. As grandezas físicas são representadas por objetos matemáticos que pertencem a certas classes e desfrutam de certas propriedades puramente matemáticas e abstratas. Essas propriedades têm interpretações físicas e podem ser muito úteis na prática. Por exemplo o deslocamento de uma partícula tem as propriedades de um vetor. A adição de vetores é comutativa, logo a adição de deslocamentos $\vec{u}, \vec{v}$ é comutativa i.e. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ podendo $\vec{v}$ ser posterior a $\vec{u}$ ou vice-versa. Algo de grande importância fundamental e já chamado à atenção desde os filósofos gregos é a explicação matemática do mundo físico.

Existem grandezas que são representadas por um número real (eventualmente um número complexo) ou quando muito por um número racional ou inteiro sendo, portanto, grandezas escalares. São disso exemplo as grandezas que medem a extensão espacial dum sistema ou temporal de um fenómeno, a massa inercial, grandezas termodinâmicas como a pressão, temperatura e as concentrações específicas.

Outras grandezas têm uma natureza vetorial, i.e. são-lhes associadas um módulo (comprimento ou amplitude), direção e sentido. São exemplos algumas grandezas cinemáticas e dinâmicas como o vetor deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força. Vetores de 2 componentes podem ser representados por um número complexo.

Existem grandezas de natureza mais complexa que os vetores e que denominamos por tensores. Os escalares são tensores de ordem p=0 (zero), os vetores são tensores de ordem p=1 porque são representados componentes indexadas a um único índice (e.g. índice i) que percorre os valores de 1 até uma certa dimensão n. Os tensores de ordem p≥2 tem componentes representadas por 2 índices i,j (i,j =1,…,n) sendo portanto formalmente representados por uma matriz quadrada de dimensão n. Em mecânica dos meios contínuos definem-se vários tensores de 2ª ordem (e.g. tensor das pressões e tensor taxa de deformação). Outro tensor de 2ª ordem é o da resistividade elétrica. Os tensores de 2ª ordem em dimensão n podem ser encarados como um agrupamento de n vetores de dimensão n. Existem outros números mais que os reais e os complexos tais como os quaterniões de Hamilton que têm 3 unidades complexas (i,j,k) (raíz de -1) em vez de uma única como os números complexos que tem apenas uma única unidade complexa (i). No entanto os quaterniões não gozam de pripriedade comutativa. Aplicam-se em cinemática em $\mathbb{R}^3$, mecânica de fluidos etc.

1.2 Propriedades dos espaços vetoriais

Define-se um espaço vetorial real S como um conjunto de elementos (denominados vetores), representados habitualmente por um símbolo $\vec{v}$ (letra com uma pequena seta sobreposta). Sobre o conjunto dos vetores S define-se uma operação binária interna de soma, representada pelo símbolo + (tal como na adição de números reais) tornando S numa estrutura algébrica de tipo grupo comutativo, i.e. que satisfaz às seguintes propriedades:

1) Comutatividade: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}\in S, \forall\vec{u},\vec{v}\in S$
2) Associatividade: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}, \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in S$ (1)
3) Existência de elemento neutro: existe um vetor nulo $\vec{0}\in S: \forall\vec{u}, \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
4) Existência de vetor simétrico: para todo o vetor $\vec{u}\in S$, existe o seu simétrico, denotado $-\vec{u}\in S$e tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$. Tal permite definir a subtração de vetores: $\vec{u}-\vec{v}, \forall\vec{u},\vec{v}\in S$

Para S ser um espaço vetorial real (i.e. definido sobre o corpo dos reais), é necessário definir a operação de multiplicação de um escalar real $\alpha\in\mathbb{R}$por um vetor $\vec{u}\in S$ e que representamos por $\alpha\vec{u}\in S$. Essa operação satisfaz às seguintes propriedades:

1) Distributividade em relação à soma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}; \forall\vec{u}\in S, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
2) Distributividade em relação à soma de vetores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}; \forall\vec{u},\vec{v}\in S, \forall\alpha\in\mathbb{R}$ (2)
3) Associatividade entre multiplicação de escalares e multiplicação de escalar por vetor: $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}; \forall\vec{u}\in S, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
4) Identidade multiplicativa: $1\vec{u}=\vec{u}; \forall\vec{u}\in S$

A partir das 4 propriedades anteriores podem deduzir-se as igualdades multiplicativas do vetor nulo: $0\vec{u}=\alpha\vec{0}=\vec{0}; \forall\vec{u}\in S, \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Os exemplos mais elementares de espaços vetoriais reais são os constituídos pelos n-tuplos, ou seja, os agrupamentos de n valores reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)\in\mathbb{R}^n; v_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n$. Em particular todas as posições do espaço tridimensional (3D), i.e. com n=3, representam-se por tripletos de coordenadas cartesianas $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. No entanto existem outros espaços vetoriais menos triviais. Por exemplo o conjunto de todas as funções lineares: $f(x)=ax+b: I\to\mathbb{R}$ definida sobre um subconjunto $I\subseteq\mathbb{R}$ é um espaço vetorial cujo vetor nulo é a função nula: $f(x)=0$.

Um conceito muito importante nos espaços vetoriais é o de conjunto de vetores linearmente independentes. Assim um conjunto $L=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_r\}$de r vetores, todos não nulos, diz-se linearmente independente se qualquer combinação linear nula deles: $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\vec{e}_i=\vec{0}$ exigir que os coeficientes dessa combinação sejam nulos, i.e. $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$. Se tal não se verificar, então algum dos vetores pode ser representado por uma combinação linear dos outros (r-1) vetores. Nessas condições, o conjunto *L* diz-se linearmente dependente (e.g. um conjunto dueto, formado por um vetor e qualquer seu múltiplo, em particular o seu simétrico é um conjunto de vetores linearmente dependentes). O conjunto das combinações lineares dos vetores de *L* é espaço vetorial contido em S, dizendo-se um subespaço de S e é representado por: $\{\vec{u}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\vec{e}_i\}\equiv Span(L)$, i.e. (subspace spanned by *L*).

Uma questão essencial é a da representação dos vetores de um espaço vetorial através de um conjunto mínimo de vetores fixos. Tal leva-nos ao conceito de base de um espaço vetorial e que se define como um conjunto *L* de vetores linearmente independentes $L=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_r\}$tais que qualquer vetor $\vec{u}\in S$do espaço se representa por uma combinação linear única: $\vec{u}=\sum_{i=1}^{r}u_i\vec{e}_i$. O cardinal r da base ou número de vetores da base é bem definido e denomina-se dimensão do espaço vetorial S (teorema de Steinitz). Assim, os vetores do espaço real de dimensão *n* têm uma correspondência biunívoca com os n-tuplos de $(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$. Tal significa que todas as operações que se podem executar em $\mathbb{R}^n$ou propriedades que se verificam em $\mathbb{R}^n$tem um equivalente em S. Significa isso em linguagem matemática que a classe de todos os espaços Euclideanos reais de dimensão *n* constituem uma classe de equivalência em que $\mathbb{R}^n$está contido.

Refiramos o exemplo citado anteriormente das funções lineares no plano; a dimensão é 2, sendo uma base possível: $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x\}$ e portanto tem-se que $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

1.3 Espaços Euclideanos, normados e métricos

Um espaço vetorial pode ainda possuir uma estrutura mais rica se nele for definido um produto interno, o que lhe confere propriedades geométricas, tais como as noções de perpendicularidade (ou ortogonalidade), ângulo, paralelismo etc. Um produto interno real (inner product) é uma aplicação que faz corresponder um número real a cada par ordenado $(\vec{u}, \vec{v}); \vec{u}, \vec{v} \in S$. Esse valor representa-se indiferentemente por $\vec{u} \bullet \vec{v}$ou por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (notação introduzida pela Mecânica Quântica). O produto interno satisfaz às propriedades:

1) Comutatividade $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
2) Proporcionalidade: $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \alpha \in \mathbb{R}$ (3)
3) Distributividade: $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
4) Positividade: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$onde $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

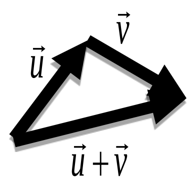
Um espaço vetorial munido de um produto interno diz-se espaço Euclideano ou espaço métrico.

A propriedade 4 permite definir a norma, amplitude ou comprimento de um vetor na forma:$\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \|\vec{u}\| \geq 0$. A positividade da norma permite chegar à desigualdade de Schwarz e à possibilidade de definir ângulo $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in S$ (mesmo que não sejam vetores do espaço), sendo o seu cosseno dado por:

$$cos[\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})] = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \in [-1,1] \quad (4)$$

Espaços Euclideanos são espaços normados (mas não necessariamente o contrário). Nestes define-se uma função real positiva ou norma satisfazendo as seguintes propriedades, que são as intuitivas para o que sucede com a norma ou comprimento de um vetor:

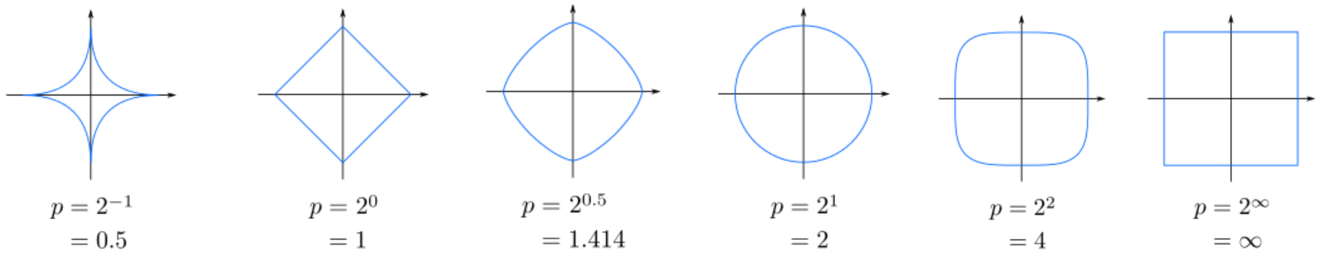
1) Positividade: $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u}; \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$. Se houver vetores não nulos de norma nula, temos uma seminorma.
2) Proporcionalidade da norma: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in S$ (5)
3) Desigualdade triangular, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, equivalente a referir que um lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois (ver figura).



Para $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$podem definir-se várias normas possíveis, i.e. satisfazendo (5), tais como as denotadas p-norma ou norma L^p: $\|\vec{u}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p)^{1/p}; p > 0$. A norma Cartesiana (ou L^2 corresponde a p=2 fornecendo o comprimento de um vetor segundo o Teorema de Pitágoras. No entanto outras normas para p≠2 são igualmente úteis, em particular a norma $\|\vec{u}\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |u_i|$.

Para cada norma, define-se o lugar geométrico dos vetores (ou pontos) de norma unitária: $\{\vec{u}: \|\vec{u}\| = 1\}$ (superfície esférica unitária). Tal corresponde à superfície esférica de raio unitário no caso p=2, n=3 (circunferência no caso p=2, n=2). O conjunto $\{\vec{u}: \|\vec{u}\| \leq 1\}$denomina-se bola unitária fechada.

É instrutivo mostrar no caso genérico para um valor de p arbitrário, como se representam as bolas unitárias no plano bidimensional (n=2) (Fig. anexa)



Geometricamente, o vetor nulo $\vec{0}$corresponde a um certo *O* ponto a que chamamos a origem e cada vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OU} \in S$une a origem *O* a um outro ponto *U* havendo assim uma correspondência entre pontos e vetores posição. A utilização do conceito de norma permite-nos definir uma distância entre pontos U, Vdada pela diferença $d(U,V) = \|\overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OU}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$. Os espaços normados são também espaços métricos (mas não necessariamente o contrário), i.e. em que por definição existe uma função distância (definida positiva):

1) $d(U,V) \geq 0;\ 0\ sse U = V$
2) $d(U,V) = d(V,U)$ (6)
3) Desigualdade triangular: $d(U,V) \leq d(U,W) + d(W,V)$

Pelas considerações anteriores a estrutura mais rica é a de espaço Euclideano, seguida da dos espaços normados e finalmente da de espaços métricos.

1.4 Ortogonalidade e independência linear

Vetores ortogonais (ou perpendiculares na geometria) são vetores cujo produto interno é nulo. A noção de ortogonalidade está intimamente ligada noção de independência linear através do seguinte teorema:

> **Teorema** : Num espaço Euclideano, um conjunto $L=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ de vetores não nulos, ortogonais entre si é necessariamente um conjunto de vetores linearmente independentes (L.I.).

Dem. Seja uma combinação linear nula $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \vec{0}$. Tomando o produto interno com $\vec{e}_j$ arbitrário, obtém-se: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 = \alpha_j \|\vec{e}_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = 0$, logo conclui-se a independência linear (qed).

Os conjuntos de vetores L.I. ortogonais e que constituam uma base, dizem-se bases ortogonais. Além disso, sem perda de generalidade, podemos substituir cada vetor da base pelo seu versor $vers(\vec{e}_j) = \vec{e}_j/\|\vec{e}_j\|$, isto é o respetivo vetor com a mesma direção e sentido e norma unitária. As bases ortogonais cujos vetores são normados (norma 1) dizem-se ortonormadas (b.o.n.).

Seja $L = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$uma b.o.n. de um espaço de dimensão *n* finita, então tem-se:

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, se\ i \neq j \\ 1, se\ i = j \end{cases}, \qquad (7)$$

onde $\delta_{i,j}$diz-se Delta de Kronecker que vale um ou zero, respetivamente para componentes iguais ou diferentes.

Um vetor arbitrário $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$tem componentes dadas por: $v_j = \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle = \vec{v} \bullet \vec{e}_j$. A demonstração recorre ao produto interno da expansão de $\vec{v}$com $\vec{e}_j$, usando as propriedades da b.o.n. Assim:

$$\vec{v} \bullet \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} v_i (\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j) = \sum_{i \neq j}^{n} v_i (\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j) + v_j (\vec{e}_j \bullet \vec{e}_j) = 0 + v_j = v_j \quad \text{(qed).}$$

A noção de expansão de um vetor através de uma combinação linear de vetores uma b.o.n. pode generalizar-se para funções pertencentes a um certo espaço Euclideano de funções (espaço funcional Euclideano). Tal exige a definição de um produto interno entre funções satisfazendo às suas propriedades operacionais (3).

Tomando em conta a ortonormalidade entre versores da b.o.n., o produto interno entre dois vetores arbitrários $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$ e $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$expressos numa b.o.n. é dada por: $\vec{u} \bullet \vec{v} = (\sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i) \bullet (\sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j (\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (8)

Este produto (soma dos produtos das componentes na b.o.n.) diz-se produto interno canónico.

A partir do produto interno canónico, podem definir-se outros produtos internos, todos eles satisfazendo as propriedades (3). Um exemplo genérico é dado por:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i w_i \,;\, w_i > 0, \forall i \qquad (9)$$

onde os coeficientes positivos fixos $w_i > 0$são chamados de pesos do produto interno. A superfície de norma unitária correspondente é um híper-helipsóide (generalização a *n* dimensões de uma elipse) com eixos

$(w_i)^{-1/2}$. A utilização de normas não canónicas, i.e. com pesos diferentes, é útil quando se pretende dar mais ou menos importância relativa às diferentes componentes.

Um conjunto de *n* vetores L.I. $J = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ mas não necessariamente ortogonais, pode transformar-se numa base ortonormada $L = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$através da ortogonalização de Gram Schmidt. Trata-se de um processo iterativo baseado numa passo de ortogonalização e de um passo de normalização de cada vetor:

$$\vec{e}_1 = \vec{a}_1 / \|\vec{a}_1\|$$
$$\vec{f}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\vec{a}_k \bullet \vec{e}_i)\vec{e}_i; \vec{e}_k = \vec{f}_k / \|\vec{f}_k\|; k = 2, \dots, n$$

1.5 Mudança de base

Consideremos uma nova base ortonormada (b.o.n.) de versores$\vec{f}_j, j = 1, \dots, n$obtida a partir da antiga b.o.n. com versores$\vec{e}_i, i = 1, \dots, n$. Recorrendo ao teorema 1, a transformação de base escreve-se:

$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} (\vec{e}_i \bullet \vec{f}_j)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\vec{e}_i\, , j = 1, \dots, n$ onde $R_{ij} = cos \measuredangle (\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \vec{e}_i \bullet \vec{f}_j$ é a *i*-ésima componente do versor $\vec{f}_j$. Essas componentes, reunidas na chamada matriz de rotação $\boldsymbol{R}$ com coeficientes R_{ij}na linha *i* e coluna *j*, são os cossenos dos ângulos entre os versores novos $\vec{f}_j$e os versores antigos $\vec{e}_i$ (cossenos diretores). Dada a comutatividade do produto interno, tem-se que

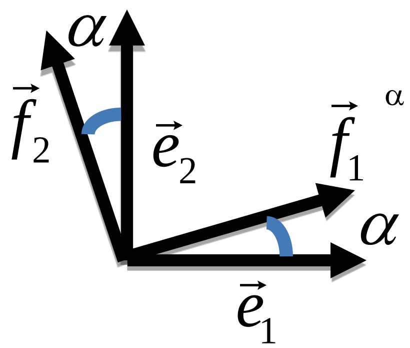
$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} (\vec{e}_i \bullet \vec{f}_j)\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\vec{f}_j\, , i = 1, \dots, n \quad (10)$$

A matriz $\boldsymbol{R}$satisfaz a certos constrangimentos que podem ser obtidos a partir das relações:

$$\delta_{ik} = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_k = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}R_{kj} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T)_{ik} = \boldsymbol{I}_{ik}; \delta_{ik} = \vec{f}_i \bullet \vec{f}_k = \sum_{j=1}^{n} R_{ji}R_{jk} = (\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R})_{ik} = \boldsymbol{I}_{ik} \quad (11)$$

onde a matriz $\boldsymbol{I}$é a matriz identidade em dimensão *n*, o sobrescrito *T* significa transposição (aplicada a uma matriz para obter a respetiva matriz transposta, significando troca de índices de linha por coluna) e se usou a multiplicação usual entre matrizes. A relação (11) significa que a matriz inversa $\boldsymbol{R}$é a sua transposta ou seja $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$. Por definição, quando tal acontece,$\boldsymbol{R}$ diz-se uma matriz ortogonal. Mostraremos que as matrizes ortogonais tem a propriedade de o seu determinate ser ± 1 (1: rotação própria como num triedro direto; -1: rotação imprópria=rotação própria seguida de reflexão como num triedro de versores inverso).

Vamos dar exemplo de uma matriz ortogonal em dimensão *n*=2, resultante da rotação direta de um ângulo α (Fig. anexa):



A respetiva transformação pode escrever-se na forma matricial:

$$[\vec{f}_1\vec{f}_2] = [\vec{e}_1\vec{e}_2]\boldsymbol{R} = [\vec{e}_1\vec{e}_2]\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}; [\vec{e}_1\vec{e}_2] = [\vec{f}_1\vec{f}_2]\boldsymbol{R}^T$$

A coluna 1 de $\boldsymbol{R}$ contem as componentes de $\vec{e}_1$e a coluna 2 contem as componentes de $\vec{e}_2$.

A relação $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}$ verifica-se. De fato

$$\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ -sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha)^2 & cos\ \alpha\ sin\ \alpha - cos\ \alpha\ sin\ \alpha \\ cos\ \alpha\ sin\ \alpha - cos\ \alpha\ sin\ \alpha & (cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Numa dimensão *n* arbitrária, os n^2 coeficientes de $\boldsymbol{R}$, não são independentes, sendo sujeitos a n(n+1)/2 constrangimentos (relações) associadas às relações de ortogonalidade e normalização (norma unitária). Deste modo existem n^2- n(n+1)/2= n(n-1)/2 coeficientes independentes. Na verdade, qualquer matriz de rotação (ou ortogonal) pode ser construída pela sequência de n(n-1)/2 ângulos de rotação (ou ângulos de Euler) correspondente ao produto matricial de matrizes de rotação elementar (ou matrizes de Givens). Cada uma dessas rotações elementares são rotações diretas de um ângulo $\alpha_{i,j}$ do planos gerado (subtendido) pelo de direções arbitrárias segundo os versores$(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Em particular para *n*=3, há 3*2/2=3 ângulos de Euler, respetivamente dos planos $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ e $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, sendo dadas respetivamente pelas matrizes:

$$\boldsymbol{R}_{(1,2)} = \begin{bmatrix} cos\ \alpha_{1,2} & -sin\ \alpha_{1,2} & 0 \\ sin\ \alpha_{1,2} & cos\ \alpha_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_{(1,3)} = \begin{bmatrix} cos\ \alpha_{1,3} & 0 & -sin\ \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\ \alpha_{1,3} & 0 & cos\ \alpha_{1,3} \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \alpha_{2,3} & -sin\ \alpha_{2,3} \\ 0 & sin\ \alpha_{2,3} & cos\ \alpha_{2,3} \end{bmatrix}$$

cujos coeficientes satisfazem a: $\boldsymbol{R}_{ii_{(i,j)}} = \boldsymbol{R}_{jj_{(i,j)}} = cos\ \alpha_{i,j}\,; \boldsymbol{R}_{ij_{(i,j)}} = -\boldsymbol{R}_{ji_{(i,j)}} = sin\ \alpha_{i,j}\,; \boldsymbol{R}_{kk} = 1(k \neq i,j)$, sendo nulos todos os outros coeficientes. Assim uma rotação do plano $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, seguida de rotação do plano $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, seguida de rotação do plano $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é dada pelo produto matricial $\boldsymbol{R}_{(2,3)}\boldsymbol{R}_{(1,3)}\boldsymbol{R}_{(1,2)}$. As rotações não comutam em geral.

Mostremos agora como se transformam as componentes ou coordenadas de um vetor $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \vec{e}_i$quando se escreve na b.o.n. $\vec{f}_j, j = 1, \dots, n$. Usando a transformação (10) tem-se:

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ij}v_i\right)\vec{f}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j\, \vec{f}_j; \tilde{v}_j = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}v_i$= novas coordenadas

Os *n*-tuplos coluna $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$e $\widetilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)^T$formados pelas componentes de $\vec{v}$ nas bases $\vec{e}_i$e $\vec{f}_j$estão relacionados da seguinte forma matricial:

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{v}; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{v}} \tag{12}$$

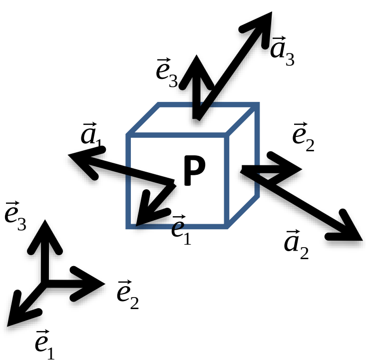
1.6 Tensores de 2ª ordem

1.6.1. Noção intuitiva de tensor de 2ª ordem

Um tensor de 2ª ordem é representado por n vetores de n componentes ou seja, pertencentes a R^n. Para exemplificar consideremos n=3.

$\widehat{\boldsymbol{A}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}A_{12}A_{13}} \\ \boldsymbol{A_{21}A_{22}A_{23}} \\ \boldsymbol{A_{31}A_{32}A_{33}} \end{bmatrix} \equiv [\vec{\boldsymbol{a}}_1\vec{\boldsymbol{a}}_2\vec{\boldsymbol{a}}_3]$onde os vetores coluna $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{1i}} \\ \boldsymbol{A_{2i}} \\ \boldsymbol{A_{3i}} \end{bmatrix} (\boldsymbol{i = 1, 2, 3})$ formam a matriz associada A. Os tensores de 2ª ordem são úteis para representar grandezas físicas que dependem da orientação em que a medição é executada. Por exemplo a temperatura num ponto de um meio contínuo é um escalar, não dependendo de qualquer tipo de orientação. Já por exemplo a resistência elétrica de um material depende da orientação do fluxo de cargas elétricas. A caracterização completa da resistência elétrica é dada pelo tensor de resistividade que é de 2ª ordem.

O estado de tensão mecânica num ponto interior P de um meio material é também caracterizado por um tensor de 2ª ordem. Tal permite inferir que força o meio exerce na sua vizinhança. Para tal consideremos um cubo infinitesimal centrado em P. Este cubo tem 3 pares de faces opostas entre si (ver figura) e ortogonais a cada versor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$da b.o.n. Assim a face frontal ou anterior é ortogonal a $\vec{e}_1$, a face da direita é ortogonal a $\vec{e}_2$e a face de cima é ortogonal a $\vec{e}_3$.



Tem-se assim *n*=3 faces, cada uma correspondente a um versor $\vec{e}_i$da b.o.n. Na face ortogonal a$\vec{e}_i$, o cubo exerce a tensão$\vec{a}_i$ (força/área) sobre a vizinhança. A tensão exercida pela face oposta é $-\vec{a}_i$. Deste modo o conjunto dos vetores tensão são reunidos num objeto com características de tensor de 2ª ordem, o chamado tensor das tensões.

1.6.2. Representação de um tensor de 2ª ordem

Na álgebra, existem objetos mais complexos que os vetores. Em dimensão *n*, um escalar tem n^0=1 componentes, dizendo-se um tensor de ordem zero. Um vetor tem n^1 componentes, sendo totalmente caracterizados por um índice *i* que percorre todos os valores de 1 a *n*; dizem-se assim tensores de ordem um ou primeira ordem. Um tensor de 2ª ordem, aqui representado por $\hat{A}$, exprime-se em componentes percorrendo 2 índices $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, e admite a expansão:

$\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \vec{e}_i \vec{e}_j$ onde A_{ij} é a (i,j)-ésima componente que multiplica as chamadas díadas $\vec{e}_i \vec{e}_j$

Cada díada é dada pelo produto exterior dos versores $\vec{e}_i$por $\vec{e}_j$, sendo denotado por $\vec{e}_i \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$. A díada é vista como um par ordenado de 2 versores pertencente ao produto Cartesiano $S \otimes S = \{(\vec{u},\vec{v}): \vec{u},\vec{v} \in S\}$. O produto exterior é não comutativo, i.e. $\vec{u}\vec{v} \neq \vec{v}\vec{u}; \vec{u},\vec{v} \in S$ e diz-se exterior porque produz objetos num espaço vetorial de dimensão maior n^2, i.e. com n^2 componentes. Em geral um tensor de 2ª ordem é formalmente representado por uma matriz quadrada de n^2 componentes.

A lei de transformação dos tensores ao passar da base (antiga) $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n$para a nova base $\vec{f}_1, \ldots \vec{f}_n$é :

$$\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_{p,q=1}^{n} \tilde{A}_{pq}\, \vec{f}_p \vec{f}_q \quad \text{onde} \quad \tilde{A}_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} R_{ip} R_{jq} A_{ij} \tag{12}$$

1.6.3. Tensor Delta de Kronecker $\hat{\boldsymbol{\delta}}$

O tensor $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ é um tensor de 2ª ordem que corresponde à matriz identidade de nxn componentes, isto é:

$$\hat{\delta}_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i \neq j \\ 1, se\ i = j \end{cases}; i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

Formalmente tem-se: $\hat{\delta} \equiv \begin{bmatrix} 10\ldots0 \\ 01\ldots0 \\ . \\ 00\ldots\ldots1 \end{bmatrix}$

1.6.4. Transposto de tensor de 2ª ordem

(Para simplificar a notação eliminemos o símbolo ^ de tensor a menos que seja estritamente necessário)

Definição: Seja A um tensor de 2ª ordem expresso em termos de díadas numa bon. Define-se o seu transposto A^T a partir da definição operacional: $A_{ij}^T = A_{ji} (i,j = 1,\ldots n)$, ou a partir da troca de índices. O transposto de um tensor é representado pela matriz transposta.

1.6.5. Tensor de 2ª ordem simétrico e antissimétrico

Um tensor de 2ª ordem A é simétrico (symmetric) se A^T=A ou seja, se $A_{ij} = A_{ji}, \forall i,j = 1,\ldots n$. Tal significa que cada linha na posição i=1,..,n seja igual à coluna correspondente. Um tensor de 2ª ordem A é antissimétrico (skew-symmetric) se A^T=-A ou seja $A_{ij} = -A_{ji}, \forall i,j = 1,\ldots n$. Tal exige que os coeficientes da diagonal sejam nulos e que os elementos da matriz triangular inferior sejam simétricos dos da matriz triangular superior.

Teorema: Para qualquer tensor de 2ª ordem A tem-se a decomposição única numa soma de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico:

$$A = A_s + A_a onde \begin{cases} A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)\text{partesimétrica} \\ A_a = \frac{1}{2}(A - A^T)\text{parteantissimétrica} \end{cases} \tag{13}$$

Exemplo:

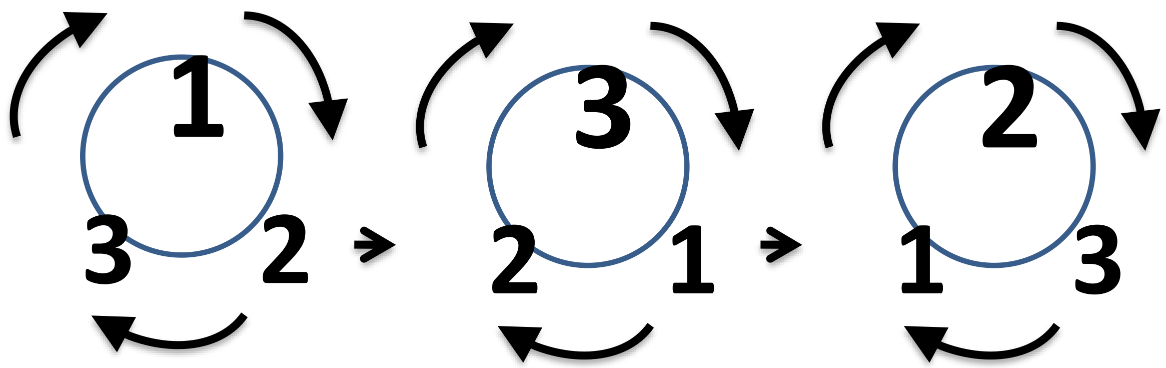
$$A \equiv \begin{bmatrix} 1-48 \\ -2610 \\ -642 \end{bmatrix} =; A^T = \begin{bmatrix} 1-2-6 \\ -464 \\ 8102 \end{bmatrix}; A_s = \begin{bmatrix} 1-31 \\ -367 \\ 172 \end{bmatrix}; A_a = \begin{bmatrix} 0-17 \\ 103 \\ -7-30 \end{bmatrix}$$

1.6.6. Vetor axial associado a um tensor de 2ª ordem em R^3

Seja A um tensor anti-simétrico em dimensão n=3, representado por 3^2=9 componentes. Apenas 3 dessas componentes são não triviais e que poderemos juntar no chamado vetor axial associado $\vec{a} = ax(\hat{A})$. As componentes de $\vec{a}$satisfazem à relação:

$$a_i = A_{jk} \tag{14}$$

onde *i,j,k* constituem uma permutação cíclica da sequência (1,2,3). Uma permutação cíclica é obtida do seguinte modo. Imagine-se que (1,2,3) estão dispostos regularmente ao longo de uma circunferência. Imagine-se que os índices rodam todos de uma posição no mesmo sentido direto ou retrógrado (no sentido dos ponteiros do relógio). O resultado é uma chamada permutação cíclica simples. Uma permutação cíclica é uma sequência de permutações cíclicas simples. Assim as permutações cíclicas de (1,2,3) são: (3,1,2) e (2,3,1) tal como indicado na figura anexa.



Assim, recorrendo à antisimetria, tem-se: $a_1 = A_{2,3} = -A_{3,2}; a_2 = A_{3,1} = -A_{1,3}; a_3 = A_{1,2} = -A_{2,1}$. O tensor A e o seu vetor axial a ficam então arranjados na forma:

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 a_3 - a_2 \\ -a_3 0 a_1 \\ a_2 - a_1 0 \end{bmatrix}; \vec{a} \equiv ax(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

1.7. Tensor de 3ª ordem e superiores

1.7.1. Representação geral de tensores

Um tensor de 3ª ordem necessita de 3 índices para ser explicitado. Por exemplo:

$C = \sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ijk}\, \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k$onde C é representado por uma combinação linear de tríadas (produto exterior de um versor por uma díada ou entre 3 versores). Um tensor de ordem *p* necessita de *p* índices sendo representado por uma combinação linear de *p*-tuplos (produtos exteriores de *p* versores). Um tensor de ordem *p* e dimensão *n* é um objeto pertencente a $\mathbb{R}^{(n^p)}$ou seja tem n^p componentes e representa-se genericamente por $T = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} T_{i_1 \ldots i_p}\, \vec{e}_{i_1} \ldots \vec{e}_{i_p}$. Um exemplo de tensor de 4ª ordem é o tensor de curvatura de Riemann que é utilizado em Teoria da Relatividade Geral.

A noção de simetria é generalizável a tensores de ordem p≥3. Assim Tdiz-se hipersimétrico quando $T_{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_p}$em que $(j_1, \dots, j_p)$ é uma permutação arbitrária de $(i_1, \dots, i_p)$. Nesse caso, face aos constrangimentos, o número de componentes independentes é $(n+p-1)!/[(n-1)!\,p!]$. Por exemplo, um tensor hipersimétrico de ordem p=3 satisfaz às relações: $T_{ijk} = T_{ikj} = T_{jik} = T_{jki} = T_{kij} = T_{kji}, \forall i,j,k \in \{1, \dots, n\}$.

Numa b.o.n. rodada, as componentes satisfazem a uma relação generalizada de (12):

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} T_{j_1 \dots j_p} R_{j_1 i_1} R_{j_2 i_2} \dots R_{j_p i_p} \quad , \tag{16}$$

onde os índices fixos surgem como índices coluna da matriz de rotação $\boldsymbol{R}$.

1.7.2. Produto exterior de dois tensores

Sejam C e D tensores de ordem a e b respetivamente. Assim numa b.o.n. têm-se as expansões:

$$C = \sum_{i_1,\dots,i_a}^{n} C_{i_1 \dots i_a} \vec{e}_{i_1} \dots \vec{e}_{i_a} ; D = \sum_{j_1,\dots,j_b}^{n} D_{j_1 \dots j_b} \vec{e}_{j_1} \dots \vec{e}_{j_b} \tag{17}$$

O produto exterior de C por D é um tensor de ordem a+b e cujas componentes são todos os possíveis produtos (entre escalares) das componentes de C pelas componentes de D. Assim o respetivo produto exterior vem dado por:

$$E = C \otimes D = CD = \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^{n} \sum_{j_1,\dots,j_b=1}^{n} C_{i_1 \dots i_a} D_{j_1 \dots j_b} \vec{e}_{i_1} \dots \vec{e}_{i_a} \vec{e}_{j_1} \dots \vec{e}_{j_b} \tag{18}$$

Em termos de componentes tem-se:

$$E_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} = (CD)_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} = C_{i_1 \dots i_a} D_{j_1 \dots j_b} \tag{19}$$

O produto exterior aplica $R^a \otimes R^b$ em $R^{(a+b)}$. O produto exterior entre tensores de ordem arbitrária maior que zero é não comutativo ou seja em geral CD≠DC visto que o arranjo dos índices em CD é diferente do arranjo dos índices em DC.

Exemplo 1

Produto exterior de 2 vetores (tensores de ordem 1):

$$E_{ij} = \left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right)_{ij} = \left(\vec{a}\vec{b}\right)_{ij} = a_i b_j; F_{ij} = \left(\vec{b} \otimes \vec{a}\right)_{ij} = \left(\vec{b}\vec{a}\right)_{ij} = b_i a_j$$

É trivial verificar que o transposto de $\vec{a}\vec{b}$é $\vec{b}\vec{a}$ ou seja $(\vec{a}\vec{b})^T = \vec{b}\vec{a}$.

Exemplo 2

Produto exterior de vetor $\vec{a}$a por tensor de 2ª ordem $\hat{B}$:

$$E_{ijk} = \left(\vec{a} \otimes \hat{B}\right)_{ijk} = \left(\vec{a}\hat{B}\right)_{ijk} = a_i B_{jk}$$

1.7.3. Produto de Hadamard entre dois tensores

O produto de Hadamard, de Schur ou 'componente a componente' é um produto entre tensores C, D da mesma ordem p e dimensão n é um tensor cujas componentes são os produtos das componentes de C e D. Simbolicamente:

$$E = C \odot D C_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_p} D_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_p} = E_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_p} \qquad (20)$$

Por exemplo, o produto de Hadamard entre 2 matrizes quadradas: $E_{ij} = C_{ij} D_{ij}, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$

1.7.4. Produto interior ou contraído de dois tensores

Sejam C e D tensores de ordem *a* e *b* respetivamente na mesma dimensão *n*. Enquanto que o produto exterior aumenta a ordem dos tensores, o produto interior ou contraído é inferior à dimensão do produto exterior, surgindo como uma generalização do produto interno entre vetores. O produto interior recorre à noção de contração de índices que é essencialmente um somatório de produtos de componentes ao longo de índice tal como acontece no produto interno canónico. Genericamente, a contração de índices consiste no seguinte.

Contração de índices: De entre os índices dos tensores C e D, escolhem-se dois índices, que podem pertencer ambos a C ou ambos a D ou ser um deles de C e o outro de D. No produto contraído apenas se consideram as componentes (de C ou D) em que os valores dos referidos índices são iguais (entre 1 e a dimensão *n*), dizendo-se índices contraídos. O produto interior vem a ser a soma do produto das componentes de C e D ao longo de todos os valores (de 1 a n) dos índices contraídos ou repetidos.

Chama-se a essa operação de contração de índices, uma vez que o objeto final será um tensor com uma ordem subtraída de 2 por cada contração. Por cada escolha de par de índices tem-se um possível produto interior. Se os índices contraídos forem adjacentes (último de C com primeiro de D), então o produto interior diz-se produto interno e representa-se por $C \bullet D$. Deste modo é possível generalizar a noção de produto interno em tensores. Podem executar-se mais de uma contração de índices. A ordem tensorial do produto interior de C por D com *r* contrações é *a+b-2r*.

Vamos dar exemplos de produtos interiores entre um vetor *c* (tensor de 1ª ordem, a=1) por uma matriz *D* (tensor de 2ª ordem, b=2). Existem 3 possíveis produtos interiores com uma contração tendo todos ordem a+b-2r=1+2-2x1=1 ou seja o resultado final é um vetor (tensor com um só índice). Assim:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i D_{ij} = (c \bullet D)_j = (D^T \bullet c)_j = w_j (contração do 1º índice de c com o 1º índice de D)$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i D_{ji} = (c \bullet D^T)_j = (D \bullet c)_j = u_j (contração do 1º índice de c com o 2º índice de D)$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_j D_{ii} = (cTr(D))_j = v_j = c_j (contração do 1º índice de D com o 2º índice de D)$$

onde $Tr(D)$ i.e. o somatório das componentes da diagonal da matriz quadrada D.

O produto matricial de uma matriz D por um vetor c é um produto interior. Na notação algébrica, a representação Dc do produto de matriz D por vetor $c$coincide na notação tensorial com o produto interior$D \bullet c$. A notação da álgebra indicial (com índices explicitos) permite representar objetos algébricos mais gerais que a notação da álgebra de matrizes e vetores. Mostremos um exemplo com 2 contrações, introduzindo os chamados duplos produtos internos entre tensores de 2ª ordem:

$$\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} D_{ij} = C \bullet\bullet D (\text{contrações:1ºíndicede}C\text{com1ºde}D e\text{2ºde}C\text{com2ºdeD:índiceshomólogos})$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} D_{ji} \quad = C : D (\text{contrações:1ºíndicede}C\text{com2ºde}D e\text{2ºde}C\text{com1ºdeD: índices anti-homólogos})$$

Nestes casos, o produto contraído tem 2+2-2x2=0 índices, ou seja, trata-se de um escalar e pode encarar-se como um produto interno. A norma quadrada $C \bullet\bullet C = \|C\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} {C_{ij}}^2$é a norma de Frobenius.

Usando essa convenção pode exprimir-se o traço de um tensor *C* (soma dos elementos da diagonal) na forma: $Tr(C) = \delta : C = \delta \bullet\bullet C = C_{11} + \ldots + C_{nn}$. Em particular o traço do tensor Delta de Kronecker é Tr(δ)=n=dimensão do espaço R^n.

1.7.5. Convenção de Einstein (CE) ou dos índices mudos

Sempre que há contração de índices há normalmente que representar o símbolo de somatório que está implícito. Einstein inventou uma convenção que omite o símbolo de somatório economizando assim a escrita sem qualquer ambiguidade. Essa convenção afirma que sempre que haja índices representados pela mesma letra (ex. i), admite-se (a menos que se diga o contrário) que esses índices contraem tomando-se, portanto, o somatório para todos os valores possíveis desses índices (de 1 a *n*). O símbolo de somatório é omitido uma vez que é redundante quando se admite a convenção de Einstein.

Exemplo 1 $\qquad a_i B_{ij} = a_p B_{pj} = \sum_{i=1}^{n} a_i B_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_p B_{pj}$

Na expressão anterior, *i* e *p* são índices mudos uma vez que estes são índices de somatório enquanto que *j* é um índice fixo.

Exemplo 2 $A_{ip}B_{ij} = \sum_{i=1}^{n} A_{ip}B_{ij} = C_{pj}$

Neste caso *i* é índice mudo, (*p,j*) são índices fixos.

Exemplo 3 $a_iB_{ii} = a_pB_{pp} = \sum_{i=1}^{n} a_iB_{ii} = \sum_{p=1}^{n} a_pB_{pp}$

i ou *p* constituem um índice mudo.

1.7.6. Aniquilação do tensor Delta de Kronecker

O produto contraído permite algumas simplificações. Por exemplo, quando se considera o produto interior de um tensor A com o tensor Delta de Kronecker δ, este deve desaparecer sendo o índice contraído de A, substituído pelo índice de δ que não contrai. Tal é devido ao fato de no produto interior com δ, apenas um termo ser não nulo. Por exemplo:

$$A_{ip}\delta_{pq} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip}\delta_{pq} = A_{iq}; T_{ijk}\delta_{jq}\delta_{kq} = T_{iqk}\delta_{kq} = T_{iqq} = T_{ikk} \qquad (21)$$

1.7.7. Outros produtos interiores

Seja $\vec{a}$ um vetor e $\hat{T}, \hat{R}$tensores de 2ª ordem em R^n. Um dos possíveis produtos interiores é $\vec{a} \bullet \hat{T} \bullet \hat{R}$. Este tensor contraído tem ordem *p* dada pela soma das ordens dos tensores (1+2+2), subtraída de duas vezes o número de contrações (duas neste caso). Assim *p*=1+2+2-2x2=1, tratando-se, portanto $\vec{a} \bullet \hat{T} \bullet \hat{R}$de um vetor. Assim, usando a convenção de Einstein, a sua *i*-ésima componente é:

$$\left(\vec{a} \bullet \hat{T} \bullet \hat{R}\right)_i = a_jT_{jp}R_{pi} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_jT_{jp}R_{pi} = a_sT_{sk}R_{ki} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_sT_{sk}R_{ki} = a_kT_{ks}R_{si},$$

onde há duas contrações de índices uma vez que há o par de índices j (ou s) e o par de índices p (ou k). Os índices contraídos são mudos e devem ser representados por letras diferentes das dos outros índices contraídos e das dos índices fixos.

Usando a convenção de Einstein, os dois possíveis duplos produtos interiores entre tensores de 2ª ordem T e R são $T: R = T_{ij}R_{ji}; T \bullet\bullet R = T_{ij}R_{ij} = T: R^T = T^T: R$.

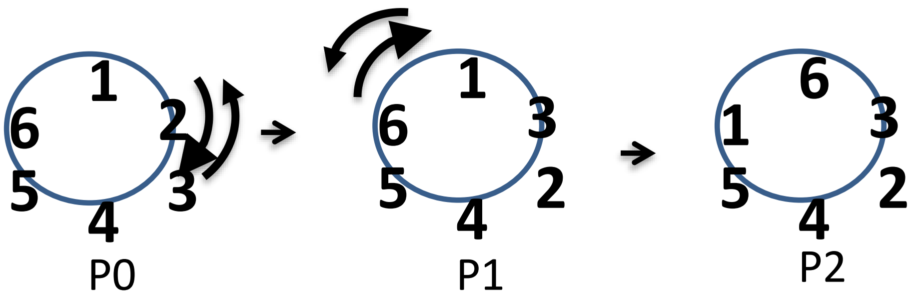
1.7.8. Tensor alternante ou de Levi-Civita ε

O tensor de Levi-Civita ou tensor alternante é um tensor especial de ordem *p* em dimensão n=p. Esse tensor assume valores unicamente de {0,1,-1} e fornece a paridade de uma permutação. A definição é:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{cases} 0 \text{se dois ou mais índices são iguais} \\ \text{paridade da permutação } i_1, i_2, \dots i_p \text{ quando todos os índices são diferentes} \end{cases} \qquad (22)$$

Definamos paridade de uma permutação $i_1, i_2, \dots i_p$arbitrária dos números inteiros 1,2,...,p (reordenação dos valores 1,2,...p , e.g. 2,1,3,4....p). Admitamos que os *p* índices estão dispostos ciclicamente ou seja com o primeiro adjacente ao último (e.g. uma mesa redonda na qual se sentam *p* pessoas numeradas).

Uma permutação simples consiste numa troca de índices adjacentes (e.g. duas pessoas vizinhas trocando de lugar). Vamos considerar um exemplo de uma sequência de permutações simples com p=5 (ver Figura).



A permutação P2 é o resultado da sequência das permutações simples P0 e P1. Pode mostrar-se que é possível chegar a uma permutação arbitrária (chamemos-lhe π), unicamente com uma sequência $m(\pi)$ de permutações simples. A sequência não é única, no entanto a sua paridade é bem definida, o que significa que $m(\pi)$ é par ou ímpar independentemente da sequência escolhida. Cada permutação de p símbolos é assim caracterizada pela assinatura da permutação: $(-1)^{m(\pi)}$ que tem o valor 1 ou -1 conforme a permutação seja par ou ímpar (e.g. P1 é ímpar e P2 é par).

Mostra-se que a paridade de uma troca de dois índices deixando todos os outros inalterados é ímpar.

O tensor alternante de 2ª ordem é representado pela matriz quadrada antissimétrica de ordem 2:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 01 \\ -10 \end{bmatrix} \tag{23}$$

O tensor ε de 3ª ordem tem a seguinte forma:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{Bmatrix} 1\ se(i,j,k)\ são\ diferentes\ e\ constituem\ uma\ permutação\ par\ de(1,2,3) \\ -1\ se(i,j,k) são\ diferentes\ e\ constituem\ uma\ permutação\ ímpar\ de(1,2,3) \\ 0\ se\ dois\ ou\ mais\ índices\ são\ iguais \end{Bmatrix}$$
$$(i,j,k = 1,2,3)$$

As permutações pares de (1,2,3) são: (1,2,3), (2,3,1) e (3,1,2), donde $\varepsilon_{1,2,3}= \varepsilon_{2,3,1}= \varepsilon_{3,1,2}= 1$. As permutações ímpares de (1,2,3) são: (2,1,3), (1,3,2) e (3,2,1) e portanto $\varepsilon_{2,1,3}= \varepsilon_{1,3,2}= \varepsilon_{3,2,1}= -1$. Todas as outras $21=n^p-6=27-6$ componentes do tensor de Levi-Civita são nulas.

As propriedades do tensor de Levi-Civita de ordem 3 são as seguintes:

1) $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$ isto é uma permutação par dos índices deixa invariante ε; uma permutação ímpar produz o simétrico de ε.
2) A contração de 2 de qualquer dos seus 3 índices é nula ou seja $\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{kii} = \varepsilon_{iki} = 0$. Esta propriedade é trivial porque os termos da soma que está implícita na contração são todos nulos.
3) Regra Épsilon-Delta. Trata-se de uma fórmula que exprime o produto interior de dois tensores alternantes com uma contração. Tem-se, pois, 2 índices mudos e 4 índices fixos:

$\varepsilon_{qrp}\varepsilon_{stp} = \varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pst} = \varepsilon_{qpr}\varepsilon_{spt} = \delta_{qs}\delta_{rt} - \delta_{qt}\delta_{rs}$ (24)

O resultado é uma soma de produtos de Deltas de Kronecker. No primeiro produto de Deltas tem-se (q,s) e (r,t) ou sejam respetivamente os primeiros e os segundos índices de cada ε (índices homólogos). No segundo produto de Deltas tem-se (q,t) e (r,s) ou sejam respetivamente (o primeiro e segundo) e (o segundo e o primeiro) índices de cada ε.

1.7.9. Tensor alternante e produto externo

O tensor alternante é muito importante na definição de produto externo ou vetorial entre vetores, de produto misto e triplo de vetores e ainda na definição de determinante de uma matriz ou tensor de 2ª ordem.

Recorrendo ao tensor alternante ε, o produto externo $\vec{a} \wedge \vec{b}$de $\vec{a}$por $\vec{b}$é dado pelo produto interior de ε com $\vec{a}$e $\vec{b}$com duas contrações de índices na forma:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ipq} a_p b_q \qquad (25)$$

O produto de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ com $\vec{a}$ é nulo e portanto $\vec{a} \wedge \vec{b}$é ortogonal a $\vec{a}$sendo dado por dado em função dos coeficientes do tensor alternante:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_i a_i = \varepsilon_{ipq} a_p b_q a_i = -\varepsilon_{piq} a_p b_q a_i (\text{pela prop. 1 de } \varepsilon) = \\
&= -\varepsilon_{ipq} a_i b_q a_p (\text{por i,p serem índices mudos}) = \\
&= -\varepsilon_{ipq} a_p b_q a_i (\text{prop. comutativa da multiplicação}) = 0 \\
&(\text{porque vem igual ao simétrico})
\end{aligned}$$

O produto externo de dois vetores pode ser obtido através da notação de determinante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \\ a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 \qquad (26)$$

1.7.10. Tensor alternante e tensor alternante assimétrico

Um tensor axial assimétrico de ordem 3 fica totalmente caracterizado pelo seu vetor axial a=ax(A) definido como:

$$A_{pq} = \varepsilon_{ipq} a_i = \varepsilon_{pqi} a_i; (i,p,q) \text{permutaçãocíclicade} (1,2,3) \qquad (27)$$

Uma forma alternativa obtida a partir do tensor alternante é:

$$a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ipq} A_{pq} = [ax(A)]_i \qquad (28)$$

1.7.11. Produtos entre vetores e tensores de 2ª ordem

Seja $\vec{a}$ um vetor e $\vec{b}\vec{c}$o produto exterior de dois vetores (ex. díada). Os produtos interno e externo entre $\vec{a}$e $\vec{b}\vec{c}$ vêm definidos de forma coerente como:

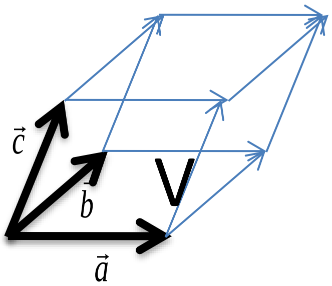
$$\vec{a} \bullet \vec{b}\vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c}; \vec{a} \wedge \vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\vec{c} \tag{29}$$

1.7.12. Produto misto entre 3 vetores de R³

O produto misto entre 3 vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é um escalar obtido pelo produto interno de um desses vetores pelo produto externo dos dois restantes. Assim tem-se o produto misto:

$$\vec{a} \bullet \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \bullet \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \varepsilon_{ipq} a_i b_p c_q \tag{30}$$

Este produto é invariante para uma permutação cíclica dos três vetores mudando de sinal para uma permutação ímpar. Tem-se $\left|\vec{a} \bullet \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right| = V$que é o volume V do paralelogramo retângulo definido pelos três vetores (vide figura).



1.7.13. Produto triplo

O produto triplo de 3 vetores é o produto externo de um deles com o produto externo dos dois restantes. O produto triplo pode exprimir-se através de produtos internos graças às propriedade Épsilon-Delta de ε. Tem-se assim o produto triplo:

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c} \tag{31}$$

Dem. A componente i do produto triplo é:

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right]_i = \left(\vec{a} \wedge \vec{d}\right)_i (\text{def.de}\vec{d}) = \varepsilon_{ikl} a_k d_l = \varepsilon_{ikl} a_k \left(\varepsilon_{lpq} b_p c_q\right) = \\
&\left(\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lpq}\right) a_k b_p c_q = \left(\varepsilon_{lik}\varepsilon_{lpq}\right) a_k b_p c_q = \left(\delta_{ip}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{kp}\right) a_k b_p c_q (\text{prop. ε-δ}) = \\
&\delta_{ip}\delta_{kq} a_k b_p c_q - \delta_{iq}\delta_{kp} a_k b_p c_q (\text{prop. distributiva}) = a_q b_i c_q - a_p b_b c_i (\text{aniquilação de } \delta) = \\
&(\vec{a} \bullet \vec{c}) b_i - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) c_i = \left[(\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c}\right]_i \forall i
\end{aligned}$$

donde sai o resultado.

1.7.14. Determinante de tensor de 2ª ordem

Um tensor A em R^3 é representado por matriz 3x3 que é formalmente idêntico à linha de 3 vetores coluna $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$ ou seja $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$. O determinante da matriz A é o produto misto $\vec{a}_1 \bullet (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3)$e representa (a menos de um sinal) o volume do paralelogramo definido pelos três vetores. O determinante é expresso por:

$$det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = det(\boldsymbol{A}^T) = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \qquad (32)$$

Pode obter-se o determinante de um tensor de 2ª ordem em $\mathbb{R}^n$ recorrendo ao tensor de Levi-Civita ε de ordem *n* que fornece a assinatura de uma permutação genérica de n índices tal como no caso em n=3. Tem-se assim em geral a fórmula de Leibnitz-Laplace:

$$det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}^T) = \varepsilon_{i_1,\dots i_n}A_{i_1,1}\dots A_{i_n,n} \qquad (33)$$

Dadas as propriedades d tensor alternante, se duas linhas ou colunas são iguais, então o determinante é nulo.

No caso n=2 o tensor alternante é dado por uma matriz 2x2:

$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21}\varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 01 \\ -10 \end{bmatrix}$ donde o determinante de A é:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} A_{11}A_{12} \\ A_{21}A_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ij}A_{i1}A_{j2} = \varepsilon_{11}A_{11}A_{12} + \varepsilon_{21}A_{21}A_{12} + \varepsilon_{12}A_{11}A_{22} + \varepsilon_{22}A_{21}A_{22} =$$
$$= -A_{21}A_{12} + A_{11}A_{22}$$

Se Bé obtida de Apor uma certa permutação π de linhas (e/ou colunas), então o determinante é o mesmo multiplicado pela paridade (1 ou -1) da permutação:

$$det(\boldsymbol{B}) = det(\boldsymbol{A})(-1)^{m(\pi)} \qquad (34)$$

Em particular a troca de duas linhas e/ou colunas troca o sinal do determinante. Se duas linhas e/ou colunas são iguais ou se alguma linha e/ou coluna é nula então o determinante é nulo.

Os determinantes tem algumas propriedades relevantes:

1) O determinante de um múltiplo da matriz identidade é: $det(\,cI) = c^n$
2) O determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes: $det(\,\boldsymbol{AB}) = det(\,\boldsymbol{A})\,det(\,\boldsymbol{B})$.
   Como corolário de 1) e 2), o determinante da matriz inversa vem: $det(A^{-1}) = 1/\,det(A)$
3) O determinante é uma forma multilinear das colunas e das linhas. Tal significa o seguinte. Seja $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}||(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})||\boldsymbol{B}$uma matriz quadrada (de dimensão n) resultante da concatenação (justaposição ||) da matriz retangular A com a combinação linear de vetores coluna $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e com a matriz retangular B. Então tem-se que o determinante é a combinação linear dos determinantes: $det(\,\boldsymbol{M}) = \alpha\,det(\,\boldsymbol{A}||\vec{u}||\boldsymbol{B}) + \beta\,det(\,\boldsymbol{A}||\vec{v}||\boldsymbol{B})$. Em particular, o determinante fica inalterado quando se adiciona a uma coluna uma combinação linear das outras. Deste modo, se as linhas e/ou colunas forem linearmente dependentes, o determinante é nulo e a matriz diz-se singular, caso cointrário diz-re regular.
4) O determinante de uma matriz triangular A (i.e. com elementos nulos acima da diagonal e/ou abaixo da diagonal) é o produto dos elementos ao longo da diagonal, $det(\,\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.
5) Teorema de Sylvester: Seja Auma matriz quadrada regular de dimensão *n* e vetores $\vec{u}, \vec{v}$de dimensão *n*, tem-se que: $det(\,\boldsymbol{A} + \vec{u}\vec{v}^T) = det(\,\boldsymbol{A})(1 + \vec{v}^T\boldsymbol{A}^{-1}\vec{u})$

1.7.15 Matriz inversa

A matriz inversa de uma matriz inversa regular$A$, i.e., com determinante não nulo denota-se por A^{-1}e satisfaz a:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = I; A_{ik}A_{kj}^{-1} = A_{ik}^{-1}A_{kj} = \delta_{ij}$$

Assim o determinante é $det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1/\,det(\boldsymbol{A})$. Em particular, numa matriz ortogonal, i.e. $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^T$, tem-se $det(\boldsymbol{U}) = \pm 1$ sendo 1 numa rotação própria e -1 numa rotação imprópria (rotação própria seguida de reflexão de um dos eixos).

A expressão da matriz inversa recorre à e de Laplace para exprimir o determinante. Chama-se menor M_{ij}ao determinante da submatriz de dimensão (n-1) resultante da eliminação da linha i e da coluna j, sendo $(-1)^{(i+j)}M_{ij}$o cofator. A matriz adjuntada (adjugate na literatura ingles; não confundir com a adjunta) é a transposta da matriz dos cofatores:

$$[Adj(\boldsymbol{A})]_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ji} \quad (35)$$

A adjuntada tem a seguinte propriedade de o o produto ser uma matriz diagonal proporcional à matriz identidade:

$$Adj(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}Adj(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A})I \quad (36)$$

Em termos de componentes, tal escreve-se na forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij}\,A_{ik} = det(\boldsymbol{A})\delta_{jk}, \forall j, k$$

Logo, se a matriz for não singular, a inversa é imediata:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}Adj(\boldsymbol{A}) \quad (37)$$

Vamos dar o exemplo mais simples da matriz em *n*=2:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}; \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} dc \\ ba \end{bmatrix}; \boldsymbol{M}^T = \begin{bmatrix} db \\ ca \end{bmatrix};$$

$$Adj(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} d-b \\ -ca \end{bmatrix}; \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d-b \\ -ca \end{bmatrix}$$