2. Cálculo diferencial e integral de campos tensoriais cartesianos em $\mathbb{R}^n$

2.1 Campos tensoriais contínuos

Qualquer ponto Q do espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser descrito de forma unívoca pelas coordenadas cartesianas $(x_1, \ldots, x_n)$. A base de versores ortonormados (b.o.n) é:$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, sendo cada versor $\vec{e}_i$tangente à i-ésima linha coordenada, na qual apenas $x_i$varia deixando invariantes todas as outras coordenadas $x_j (j \neq i)$. Em coordenadas cartesianas, essas linhas são os eixos coordenados. Desse modo, qualquer deslocamento vetorial infinitesimal $d\vec{r}$ é expresso na forma:

$$d\vec{r} = dx_i \vec{e}_i \tag{1}$$

Usa-se a convenção de Einstein a menos que se diga o contrário.

Poderemos definir sobre um domínio arbitrário Ω de $\mathbb{R}^n$um campo tensorial de ordem p ou seja, a uma aplicação:$T: \Omega \subseteq R^n \to R^{(n^p)}$em que a cada ponto Q faz corresponder um tensor de ordem p com n^p componentes.

São exemplos de campos tensoriais em mecânica dos meios contínuos, os campos escalares da pressão, temperatura, densidade (p=0), os campos vetoriais da velocidade, aceleração (p=1), os campos tensoriais das tensões, da taxa de deformação (p=2).

O campo T admite-se contínuo (exceto eventualmente em certos domínios de medida nula, tais como superfícies ou linhas em $\mathbb{R}^3$ ou linhas em $\mathbb{R}^2$) e com derivadas contínuas até uma determinada ordem, isto é a ordem necessária para as aplicações. Tal permite definir variações infinitesimais dos tensores no espaço. Estas propriedades permitem a aplicação do cálculo diferencial sobre campos de tensores.

A integração do campo T em subdomínios de $\mathbb{R}^n$é também necessária e útil em certas aplicações. Por exemplo o comportamento mecânico integrado espacialmente de um fluido exige a integração espacial de campos tensoriais.

2.2. Noção de Gradiente e Diferencial

Consideremos um campo tensorial de uma certa ordem p, $T(Q) = T(\vec{r})$, aplicado no ponto arbitrário Q com vetor posição $\vec{r}$em relação à origem do sistema de coordenadas. Os versores nos quais se exprime T são os versores fixos da base cartesiana. Vamos exprimir a variação infinitesimal dT num pequeno deslocamento $d\vec{r}$:

$$dT = dx_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2)$$

A variação dT pode exprimir-se recorrendo ao **operador gradiente**. Um operador é uma aplicação que converte uma função noutra função. Por exemplo a derivada é um operador porque converte uma função na sua função derivada. O operador gradiente é um operador tensorial de ordem 1 ou seja tem a mesma estrutura que um vetor. Assim, em coordenadas cartesianas definimos o operador gradiente na forma:

$$grad \equiv \nabla \equiv \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{(operador gradiente ou NABLA)} \quad (3)$$

O produto interno do deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ com o operador gradiente fornece o operador diferencial *d*:

$$\begin{aligned} d = \overrightarrow{dr} \bullet \nabla \equiv (dx_i \vec{e}_i) \bullet \left(\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j) \\ = dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ij} = dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4)$$

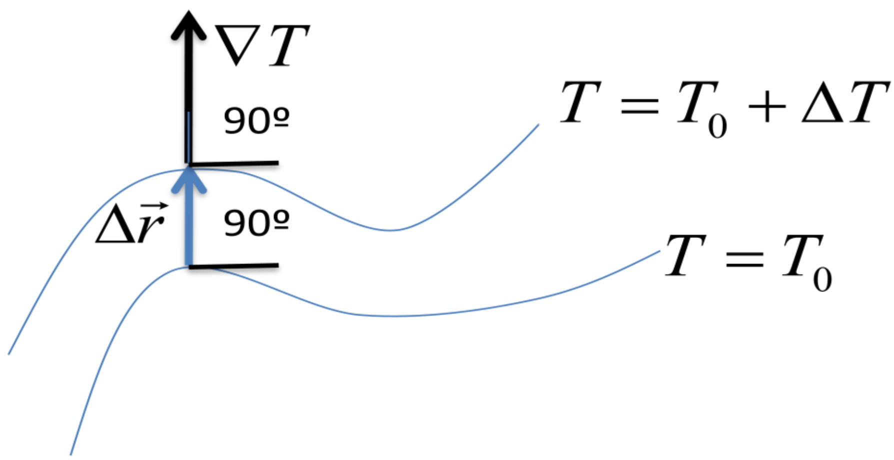
A derivada dirigida segundo uma certa direção *l*, orientada segundo o versor $\vec{l}$é dada pelo produto interno do versor $\vec{l}$ pelo operador gradiente ou seja:

$$d_l = \vec{l} \bullet \nabla \equiv l_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{d}{dl} \quad (5)$$

onde *dl* é o deslocamento medido ao longo da direção orientada *l*. Em particular, se aplicarmos esse operador a T vem: $d_l T = \frac{dT}{dl}$ ou seja a taxa de variação de T ao longo da direção orientada *l*.

2.3. Gradiente de um campo escalar

Consideremos um campo escalar diferenciável $T(\vec{r})$ em $\mathbb{R}^n$ de dimensão *n*. O lugar geométrico Σ_T dos pontos onde T =T_0 =constante é um domínio (variedade) com dimensão n-1, isto é que pode ser descrito parametricamente com (n-1) parâmetros. Chamemos a esse domínio Σ_T de iso-domínio T (o prefixo *iso* significa constante). Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ os iso-domínios são iso-superfícies (duas dimensões). Em $\mathbb{R}^2$, os iso-domínios são iso-linhas (uma dimensão). Ao longo dos iso-domínios T não há variação do campo T.

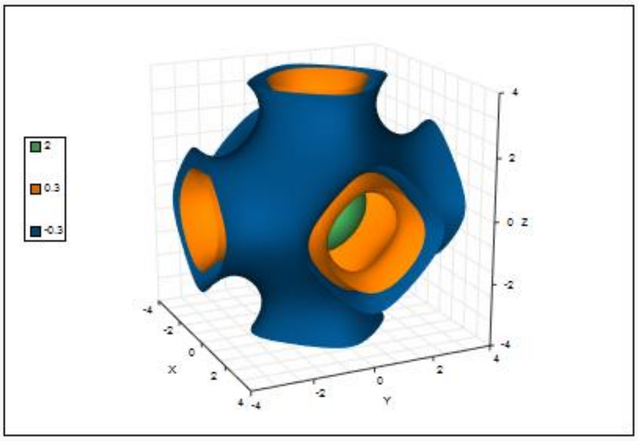


Calculemos a variação *dT* ao longo de um deslocamento arbitrário $d\vec{r} = \|d\vec{r}\| vers(d\vec{r}) = dr\vec{l}$onde$dr > 0$ é o comprimento desse deslocamento e $\vec{l} = vers(d\vec{r})$ o seu versor. Tem-se então:

$$dT = dr(\vec{l} \bullet \nabla T) = dr\|\nabla T\| \cos(\alpha); \alpha = \angle(\vec{l}, \nabla T) = \text{ângulo entre } \vec{l} \text{ e } \nabla T \quad (6)$$

Esta expressão permite mostrar as seguintes propriedades do gradiente de um campo escalar.

1) O gradiente de T é perpendicular aos iso-domínios de T. Na verdade, se o versor $\vec{l}$for tangente aos iso-domínios de T, a variação dT=0 ou seja o produto interno $\vec{l} \bullet \nabla T = 0$o que significa que o iso-domínio de T é ortogonal a ∇T.
2) A máxima derivada dirigida positiva de T (máxima taxa de variação espacial positiva de T verifica-se na direção e sentido do gradiente. Na verdade, tomando $\vec{l} = vers(\nabla T)$ tem-se: $dT = dr\|\nabla T\| \geq 0$. Assim $\|\nabla T\| \sim \Delta T/\Delta r$onde Δré a distância, medida na perpendicular entre iso-domínios em que difira o campo difere de $\Delta T \geq 0$. Deste modo, quanto menor a distância Δrentre iso-domínios (iso-superfícies, isolinhas), maior o módulo do gradiente de T. **O campo escalar T fica totalmente caracterizado pelo gráfico dos iso-domínios.**



Isosurfaces of the function w = cos(x) + cos(y) + cos(z).

(exemplo de iso-superfícies em $\mathbb{R}^3$)

2.4. Gradiente de um campo tensorial cartesiano

Seja T um campo tensorial de ordem p≥1 em $\mathbb{R}^n$ (exemplos: um campo vetorial, um campo de tensores de 2ª ordem). Um campo tensorial é composto de n^p campos escalares e portanto, poderemos calcular o gradiente e os iso-domínios de cada uma das n^p componentes.

O gradiente do tensor T de ordem p é assim um tensor de ordem p+1 que é formado pelo gradiente (vetorial) de cada uma das n^p componentes escalares. Tendo em conta que os versores da base em que se exprime T são cartesianos e fixos (contrariamente ao que sucede em coordenadas curvilíneas em geral), tem-se:

$$\nabla T = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_j \vec{e}_j\right) = \vec{e}_i \vec{e}_j \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \tag{7}$$

Note-se a aplicação da Convenção de Einstein.

Para um tensor T de 2ª ordem, o seu gradiente é um tensor de 3ª ordem:

$$\nabla T = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k\right) = \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \tag{8}$$

A variação infinitesimal *dT* de um tensor de ordem p é dada, tal como para o caso escalar por:

$$dT = \overrightarrow{dr} \bullet \nabla T \tag{9}$$

Note-se que para tensores de ordem p≥1, em geral $\overrightarrow{dr} \bullet \nabla T \neq \nabla T \bullet \overrightarrow{dr} \neq dT$. No caso de p=2, $\nabla T \bullet \overrightarrow{dr} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{jk} \vec{e}_j\right) dx_k; \overrightarrow{dr} \bullet \nabla T = dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k\right)$. Em ambos os casos a contração de índices é diferente.

2.5. Operador divergência de tensores cartesianos

O produto interno entre tensores permite construir o operador de divergência, muito útil em cálculo diferencial e integral em $\mathbb{R}^n$. Assim, em coordenadas cartesianas, define-se o **operador divergência aplicado a um tensor T cartesiano de ordem p≥1** na forma:

$$\nabla \bullet T \equiv \mathrm{div}T = \vec{e}_{i_2}\ldots\vec{e}_{i_p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{ii_2\ldots i_p}\right) \tag{10}$$

onde se executa a contração do índice da derivada com o primeiro índice da esquerda de T. O resultado é um tensor de ordem p-1. Assim a divergência de um campo vetorial é um campo escalar, a divergência de um campo tensorial de 2ª ordem é um campo vetorial etc. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas (x,y,z), a divergência de um campo vetorial $\vec{v} = u(x,y,z)\vec{e}_x + v(x,y,z)\vec{e}_y + w(x,y,z)\vec{e}_z$ vem:

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{11}$$

onde $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$são os versores associados às direções orientadas x,y,z respetivamente.

Um campo tensorial de divergência nula diz-se solenoidal ou seja, em que $div(T) = 0$.

2.6. Operador Laplaciano

O operador Laplaciano define-se como a norma quadrada do operador gradiente, ou seja, o produto interno do operador gradiente por ele próprio. Tem-se então o Laplaciano de um tensor T ordem p≥0 (escalar, vetor, tensor):

$$\nabla^2 T \equiv (\nabla \bullet \nabla)T \equiv \mathrm{Lap}T \equiv \vec{e}_{i_1}\vec{e}_{i_2}\ldots\vec{e}_{i_p}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left(T_{i_1 i_2\ldots i_p}\right) \tag{12}$$

Por exemplo os Laplacianos de um escalar φ e de um vetor em $\mathbb{R}^3$ vêm respetivamente:

$$\mathrm{Lap}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};\mathrm{Lap}\vec{v} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} \tag{13}$$

2.7. Operador Laplaciano iterado

Em algumas aplicações nomeadamente para a modelação do atrito em mecânica de fluidos, usa-se o Laplaciano iterado (ex. Laplaciano do Laplaciano). Assim tem-se o operador bi-harmónico para a duplicação do Laplaciano:

$$\nabla^4 T \equiv \mathrm{LapLap}T \equiv \vec{e}_{i_1}\vec{e}_{i_2}\dots\vec{e}_{i_p}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left(T_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) \tag{14}$$

Em coordenadas (x,y,z) e para o caso de um escalar φ tem-se:

$$\nabla^4 \varphi = \mathrm{LapLap}\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi \tag{15}$$

2.8. Operador rotacional de tensores cartesianos

O rotacional (rot ou curl em alguma literatura inglesa) de um tensor T de ordem p≥1 em $\mathbb{R}^n$recorre ao produto externo em $\mathbb{R}^n$ e portanto, ao tensor alternante de ordem n em $\mathbb{R}^n$e à operação de produto externo. O rotacional de T é também um tensor de ordem p.

2.8.1. Rotacional em $\mathbb{R}^3$

Usa-se o tensor alternante em $\mathbb{R}^3$ou o tensor de Levi-Civita:

$$\nabla \wedge T \equiv \mathrm{rot}T = \vec{e}_k\vec{e}_{i_2}\dots\vec{e}_{i_p}\varepsilon_{kjs}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(T_{s i_2 \dots i_p}\right) \tag{16}$$

Pode assim definir-se o rotacional de um campo vetorial, bem como o rotacional de um campo tensorial. Um campo tensorial com rotacional nulo diz-se irrotacional ou seja em que $\mathrm{rot}T = 0$.

Em particular o rotacional é de um campo vetorial $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = v_i\vec{e}_i$em coordenadas cartesianas (x,y,z) é:

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \vec{e}_k\left(\varepsilon_{kjs}\frac{\partial v_s}{\partial x_j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x\vec{e}_y\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \\ uvw \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{17}$$

Tal como um produto externo entre vetores, o rotacional de um campo vetorial é um campo de pseudo-vetores, i.e. cujo sinal depende de o triedro $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ser direto ou inverso.

2.8.2. Rotacional de campos bidimensionais em$\mathbb{R}^2$

O equivalente ao rotacional em $\mathbb{R}^2$ (n=2) é um operador vetorial aplicado ao campo escalar φ (de ordem p=n-1=2) na forma:

$$\nabla\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_k\left(\varepsilon_{kj}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x\vec{e}_y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{e}_x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{e}_y\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{18}$$

Onde se usou o tensor alternante a 2 dimensões: $\varepsilon_{1,2} = -\varepsilon_{2,1} = 1; \varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{2,2} = 0$.

2.9. Identidades entre operadores diferenciais

Usando as propriedades dos operadores divergência, rotacional, do produto externo, interno, triplo e misto, é possível obter várias entidades entre operadores que são úteis em cálculo diferencial integral em $\mathbb{R}^3$nomeadamente em mecânica dos meios contínuos.

Tem-se então para um campo escalar arbitrário φ, campos vetoriais $\vec{A}, \vec{B}$ e vetor posição $\vec{r}$ as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
&1{:}\ \nabla \wedge (\nabla\varphi) = rot(grad\varphi) = \vec{0}\\
&2{:}\ \nabla \bullet \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) = div(rot\vec{A}) = 0\\
&3{:}\ \nabla \bullet \vec{r} = n (\mathrm{n{=}2em}\mathbb{R}^2, \mathrm{n{=}3em}\mathbb{R}^3)\\
&4{:}\ \nabla \wedge \vec{r} = \vec{0}\\
&5{:}\nabla \bullet \left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\nabla \bullet \vec{A} + \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\varphi\\
&6{:}\ \nabla \wedge \left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\nabla \wedge \vec{A} + (\nabla\varphi) \wedge \vec{A}\\
&7{:}\ \nabla \bullet \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \bullet \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) - \vec{A} \bullet \left(\nabla \wedge \vec{B}\right)\\
&8{:}\ \nabla\left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right) = \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B} \bullet \nabla\right)\vec{A} + \vec{A} \wedge \left(\nabla \wedge \vec{B}\right) + \vec{B} \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right)\\
&9{:}\ \nabla \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{A}\nabla \bullet \vec{B} + \left(\vec{B} \bullet \nabla\right)\vec{A} - \vec{B}\left(\nabla \bullet \vec{A}\right) - \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{B}\\
&10{:}\ \nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \bullet \vec{A}\right) - (\nabla \bullet \nabla)\vec{A}\\
&11{:}\ \vec{A} \wedge \left(\nabla \wedge \vec{B}\right) - \left(\vec{A} \wedge \nabla\right) \wedge \vec{B} = \vec{A}\left(\nabla \bullet \vec{B}\right) - \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{B}\\
&12{:}\ \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{A} = \tfrac{1}{2}\nabla\left(\vec{A} \bullet \vec{A}\right) - \vec{A} \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) \qquad (\mathrm{decomposição de Weber})
\end{aligned} \quad (19)$$

Como exemplo, apresentemos a demonstração de algumas igualdades.

2.9.1. Demonstração de $\boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}\right) = \vec{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\nabla} \bullet \vec{\boldsymbol{B}} + \left(\vec{\boldsymbol{B}} \bullet \boldsymbol{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{\nabla} \bullet \vec{\boldsymbol{A}}\right) - \left(\vec{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{B}}$.

O produto triplo $\nabla \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$pode expandir-se como: $\left(\nabla \bullet \vec{B}\right)\vec{A} - \left(\nabla \bullet \vec{A}\right)\vec{B} (\nabla \mathrm{aplica\text{-}seaosdoisvectores})$

Usando a derivada do produto em que se deriva um dos vetores de cada vez tem-se:

$$\left(\nabla \bullet \vec{B}\right)\vec{A} = \vec{A}\left(\nabla \bullet \vec{B}\right) + \left(\vec{B} \bullet \nabla\right)\vec{A}; \left(\nabla \bullet \vec{A}\right)\vec{B} = \vec{B}\left(\nabla \bullet \vec{A}\right) + \left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{B}$$

donde se obtém o resultado.

2.9.2. Demonstração de $\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \bullet \vec{A}\right) - (\nabla \bullet \nabla)\vec{A}$

ou $rot(rot(\vec{A})) = Grad(Div(\vec{A})) - Lap(\vec{A})$

Desenvolvamos a componente *i* de $\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right)$:

$$\left[\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{A}\right)\right]_i = \varepsilon_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\nabla \wedge \vec{A}\right)_q = \varepsilon_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\varepsilon_{qrs} \frac{\partial A_s}{\partial x_r}\right) =$$
$$\left(\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{qrs}\right) \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_p \partial x_r} = \left(\varepsilon_{qip}\varepsilon_{qrs}\right) \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_p \partial x_r} = \left(\delta_{ir}\delta_{ps} - \delta_{is}\delta_{pr}\right) \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_p \partial x_r} \text{Regra Épsilon-Delta)} =$$
$$= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_p \partial x_i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_r \partial x_r} \text{(Aniquilação de Deltas)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x_p}\right) - (\nabla \bullet \nabla) A_i$$
$$= \left[\nabla\left(\nabla \bullet \vec{A}\right)\right]_i - \left[(\nabla \bullet \nabla)\vec{A}\right]_i, \forall i$$

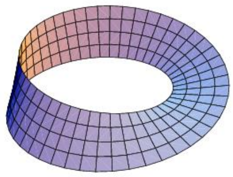
Como a igualdade se verifica para cada componente *i* então obtém-se a igualdade para a totalidade do vetor.

2.10. Cálculo Integral de tensores cartesianos

No cálculo integral em $\mathbb{R}^n$ são necessários calcular vários tipos de integrais tais como o fluxo de um campo tensorial através de uma superfície orientada e a circulação ao longo de uma curva fechada.

2.10.1. Fluxo de um campo tensorial através de uma superfície orientada

Consideremos uma superfície orientada Σ no espaço $\mathbb{R}^3$ (superfície curva) ou no espaço $\mathbb{R}^2$ (superfície plana) limitada pela curva fronteira $\partial\Sigma$. Em $\mathbb{R}^3$, uma superfície orientada é aquela que tem dois lados bem definidos e não é possível através de um percurso ao longo da superfície passar de um lado para o outro da superfície. Existem superfícies não orientadas tais como a fita de Möbius, isto é que têm apenas um lado como mostra a figura.



A curva fronteira $\partial\Sigma$ de Σ é em geral uma linha torsa se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ou plana se pertencer a um determinado plano de $\mathbb{R}^3$. Tendo essa superfície dois lados bem definidos, poderemos definir um 'lado de dentro' e o correspondente 'lado de fora'. O elemento de superfície orientada define-se como:

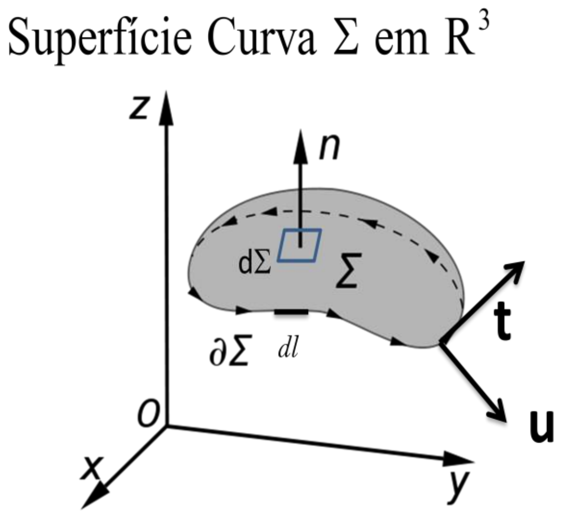
$$\overrightarrow{d\Sigma} = \vec{n} d\Sigma \tag{20}$$

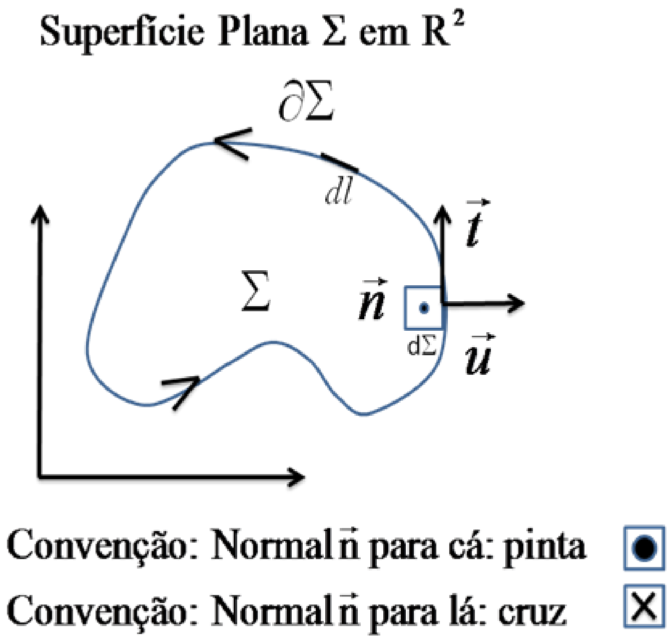
onde $d\Sigma$é a área infinitesimal (positiva) e $\vec{n}$é o versor normal que aponta para o lado de fora. O versor tangente $\vec{t}$é o versor com o sentido direto, tangente à curva orientada $\partial\Sigma$. O elemento de arco ao longo de $\partial\Sigma$ é *dl*. O sentido direto (anti-horário) é aquele que deixa a superfície Σ à sua esquerda. O versor $\vec{u}$é tangente à superfície e perpendicular à curva fronteira $\partial\Sigma$. Têm-se as relações:

$$\vec{u} = \vec{t} \wedge \vec{n}; \vec{t} = \vec{n} \wedge \vec{u} \tag{21}$$

O fluxo de um campo tensorial T em $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$), de ordem p≥1 através da superfície orientada Σ (curva ou plana) é o integral:

$$\Phi_\Sigma(T) = \iint_\Sigma d\Sigma \vec{n} \bullet T \tag{22}$$





Em particular a superfície Σ pode ser a fronteira ∂Ω de um certo domínio tridimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nesse caso a superfície Σ=∂Ω é uma superfície fechada e o seu bordo ∂Σ é o conjunto vazio (não tem bordo).

Aplicação: Cálculo da quantidade de massa total (ou parcial) escoada por unidade de tempo e que atravessa a superfície orientada Σ. O campo T e o respetivo fluxo são neste caso:

$$\vec{T} = \vec{v}\rho; \Phi_\Sigma(\rho\vec{v}) = \iint_\Sigma d\Sigma \vec{n} \bullet \vec{v}\rho$$

onde ρ é a densidade do fluido (ou densidade parcial de um certo tipo de massa específico, ex: sal, vapor) e $\vec{v}$é a velocidade do fluido. A quantidade $\Phi_\Sigma(\rho\vec{v})$ tem dimensões físicas de kg/s (massa/tempo) e na terminologia dos fluidos chama-se débito de massa. Se a velocidade $\vec{v}$ for tangente em cada ponto à superfície, então $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0$ e o débito é nulo, ou seja, a massa não atravessa Σ, verificando-se a condição de fluxo nulo ou de impermeabilidade total (ou parcial a um certo tipo de massa ou espécie química).

2.10.2. Fluxo no bordo de uma superfície orientada

A superfície orientada Σ (curva ou plana) tem como fronteira a curva orientada ∂Σ. Esta curva tem como versor tangente $\vec{t}$, versor normal exterior$\vec{u}$e elemento de arco *dl.* Define-se o fluxo de um campo tensorial T (de ordem p≥1) através da curva ∂Σ como:

$\Phi_{\partial\Sigma}(T) = \oint_{\partial\Sigma} dl\vec{u} \bullet T$

Aplicação: Consideremos o escoamento bidimensional sobre uma superfície (ex. escoamento de água sobre uma bolha de água e detergente (sabonária)). A massa está distribuída por unidade de superfície sendo o seu valor σ (densidade areolar ou por área) de dimensões kg/m^2. O débito (quantidade de massa que atravessa ∂Σ é dado por:

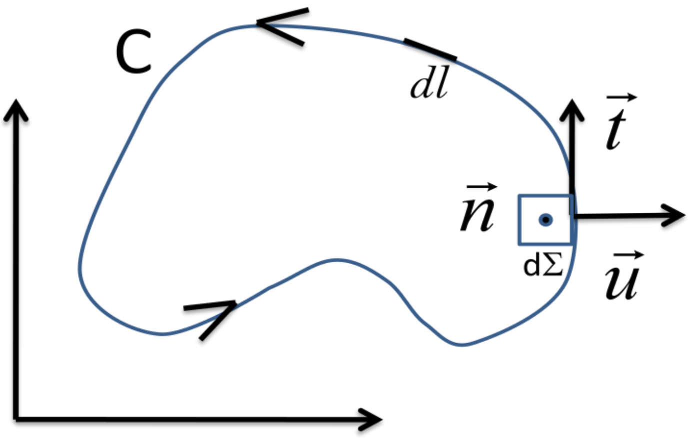
$$\vec{T} = \vec{v}\sigma; \Phi_{\delta\Sigma}(\sigma\vec{v}) = \oint_{\delta\Sigma} dl\vec{u} \bullet \vec{v}\sigma$$

A curva ∂Σ que limita Σ é fechada, no entanto pode igualmente calcular-se o fluxo ao longo de uma curva não fechada C com extremidades (início e fim).

2.10.3. Circulação de um campo tensorial T ao longo de uma curva orientada fechada

Consideremos um campo tensorial T de ordem p≥1 em $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$). A circulação de T ao longo de uma curva fechada orientada C é o integral de linha:

$$\Gamma_C(T) = \oint_C dl\vec{t} \bullet T \qquad (23)$$



Aplicação: Consideremos um fluido circulando em circuito fechado em sentido único ao longo da curva fechada C (célula de circulação) com massa por unidade de comprimento ou densidade linear ρ_l (em kg/m). A energia cinética do fluido em circulação é dada pela circulação ao longo de C do vetor $\frac{1}{2}\rho_l\|\vec{v}\|\vec{v}$ onde $\vec{t}$é o versor de $\vec{v}$.

2.10.4. Teoremas Integrais em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$

O cálculo de integrais tridimensionais 3D num domínio $\Omega \subset R^3$ pode em certos casos ser obtido pelo integral na sua fronteira $\partial\Omega$ de normal exterior (apontando para fora) $\vec{n}$de componentes n_i. Tem-se então o teorema de Stokes generalizado em volumes (**TSG-vol**):

$$\iiint_\Omega dv \frac{\partial}{\partial x_i}(\dots) = \oiint_{\partial\Omega} d\Sigma n_i (\dots) \tag{24}$$

Onde (…) é um campo tensorial arbitrário envolvendo produtos interiores ou exteriores com o índice i e onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$são as derivadas em relação às coordenadas cartesianas. Alguns corolários deste teorema muito geral são o teorema do fluxo-divergência.

2.10.5. Teorema do fluxo-divergência em $\mathbb{R}^3$, de Gauss ou de Ostrogradsky

Tome-se no TSG-vol as componentes cartesianas A_i do campo vetorial $\vec{A}$e faça-se a contração em i. Obtem-se:

$$\iiint_\Omega dv \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \iiint_\Omega dv div\vec{A} = \oiint_{\partial\Omega} d\Sigma \vec{n} \bullet \vec{A} = \Phi_{\partial\Omega}(\vec{A}) \tag{25}$$

ou seja, o integral de volume da divergência iguala o fluxo através da fronteira. Tal permite definir a divergência de um campo vetorial como o limite quando $\Omega \to 0$ do Fluxo/Volume.

2.10.6. Outras aplicações do teorema TSG-vol

$$(\ldots) = \text{escalar}\varphi$$
$$\iiint_{\Omega} dv\ \text{grad}\varphi = \oiint_{\partial\Omega} d\Sigma\ \vec{n}\ \varphi\ (\text{integral de volume de gradiente})$$
$$(\ldots) = \wedge\ \vec{A}(produto\ externo\ com\ \vec{A})$$

$$\iiint_{\Omega} dv\ \text{rot}\overrightarrow{A} = \oiint_{\partial\Omega} d\Sigma\ \vec{n} \wedge \vec{A}\ (\text{integral de volume de rotacional}) \tag{26}$$

2.10.7. Teoremas Integrais em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$

O teorema de Stokes generalizado pode aplicar-se também sobre uma superfície orientada Σ de normal $\vec{n}$com linha fronteira ou bordo orientado·$\partial\Sigma$ com versor tangente $\vec{t}$e normal exterior $\vec{u} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Tem-se então o teorema **TSG-sup**:

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma(\vec{n} \wedge \nabla)_i\ (\ldots) = \oint_{\partial\Sigma} dl(\vec{n} \wedge \vec{u})_i\ (\ldots) = \oint_{\partial\Sigma} dlt_i\ (\ldots) \tag{27}$$

Aplicações do teorema TSG-sup em $\mathbb{R}^3$

$$(\ldots) = \varphi\vec{e}_i \iint_{\Sigma} d\Sigma\vec{n} \wedge \nabla\varphi = \oint_{\partial\Sigma} dl\ \vec{t}\varphi \tag{28}$$

$$(\ldots) = A_i \iint_{\Sigma} d\Sigma(\vec{n} \wedge \nabla) \bullet \vec{A} = \iint_{\Sigma} d\Sigma\vec{n} \bullet (\nabla \wedge \vec{A}) =$$
$$= \text{FluxodoRotacionalde}\vec{A} = \oint_{\partial\Sigma} dl\ \vec{t} \bullet \vec{A} =$$
$$\text{Circulação de } \vec{A} \text{ no bordo} = \Gamma_{\partial\Sigma}(\vec{A})(\text{Teorema de Stokes}) \tag{29}$$

Este teorema permite definir rotacional como o limite quando $\Sigma \rightarrow 0$ do quociente circulação/área.

$$(\ldots) = \wedge\ \vec{A} \iint_{\Sigma} d\Sigma(\vec{n} \wedge \nabla) \wedge \vec{A} = \oint_{\partial\Sigma} dl\ \vec{t} \wedge \vec{A} \tag{30}$$

Aplicação: vetor área tomando $\vec{A} = \vec{r} = vectorposição$g

$$\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} d\Sigma\vec{n} = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Sigma} \vec{r} \wedge \overrightarrow{dr} \tag{31}$$

2.10.8. Teorema de Green

No caso de Σ ser uma superfície plana com normal $\vec{n}$constante tem-se:

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma(\nabla)_i\ (\ldots) = \oint_{\partial\Sigma} dl(\vec{u})_i\ (\ldots) \tag{32}$$

Tomando um campo vetorial $\vec{A}$bidimensional (com componentes apenas sobre Σ) e fazendo a contração dos índices tem-se:

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma \left(\nabla \bullet \vec{A}\right)_{2D} = \oint_{\partial\Sigma} dl\vec{u} \bullet \vec{A} =$$
$$= \Phi_{\delta\Sigma}\left(\vec{A}\right) = \text{Fluxo de } \overrightarrow{A} \text{ através da linha orientada} \quad (33)$$

Ou seja, o integral de superfície da divergência iguala o fluxo através do bordo. Este teorema é uma versão 2D do teorema fluxo-divergência. Outra aplicação em 2D é a do integral do gradiente 2D:

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma (\nabla\varphi)_{2D} = \oint_{\partial\Sigma} dl\, \vec{u}\varphi \quad (34)$$