Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

CÁLCULO II

Exame modelo

A duração do exame é de 2h30m. O exame é sem consulta. Não é permitido o uso de telemóveis ou calculadoras.

<u>Pergunta 1</u> (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Resolva o problema de valor inicial

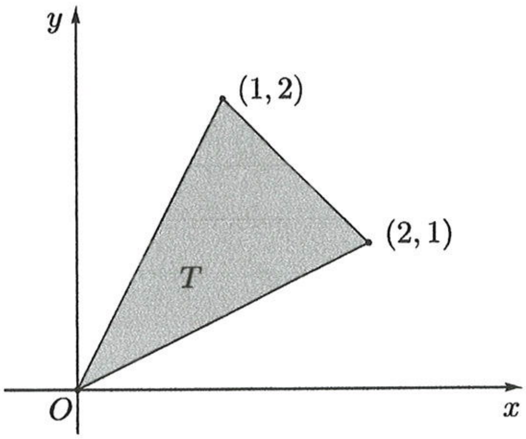
$$\begin{cases} u'(t) = (t^2+1)\, u^3(t) \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

<u>Pergunta 2</u> (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Determine e classifique os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^3y - x$.

<u>Pergunta 3</u> (4 valores, tempo estimado de resolução 15 minutos)

Calcule o comprimento da curva $r : [1,2] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (3 - t^{3/2}, (3-t)^{3/2}, 3-t)$.



<u>Pergunta 4</u> (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Calcule $\displaystyle\iint_T xy\, da$, sendo T a região plana acima representada.

<u>Pergunta 5</u> (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Calcule $\displaystyle\int_{y=1}^{2} \int_{z=0}^{y^2} \int_{x=0}^{y+z} (2y+1)\, e^x \, dx\, dz\, dy$.

(1) Numa primeira fase, focamos sobre a equação diferencial (sem condição inicial).

Aplicamos a técnica de separação das variáveis

Antes de dividirmos por u^3, observamos que $u = 0$ (constante) é solução da equação. Guardamos esta solução e procuramos outras, em que $u \neq 0$.

Podemos agora dividir por u^3 sem preocupações.

$$\frac{u'}{u^3} = t^2 + 1$$

Primitivamos:

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{3}t^3 + t + C$$

$$2u^2 = -\frac{1}{\frac{1}{3}t^3 + t + C}$$

$$u^2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t + C}$$

① (continuação)

Temos então a solução da equação (sem tomar em conta a condição inicial)

$$u(t) = \begin{cases} \sqrt{-\dfrac{1}{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t + C}} \\ -\sqrt{-\dfrac{1}{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t + C}} \\ 0 \end{cases}$$

<u>Nota</u> Devido à forma da condição inicial, o primeiro e o terceiro ramo desta solução não apresentam interesse.

Procuramos então o valor de $C \in \mathbb{R}$ que implique $u(0) = -1$:

$$\sqrt{-\frac{1}{C}} = 1 \qquad -\frac{1}{C} = 1 \qquad C = -1$$

Resposta final:

$$u(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t}}$$

(2) Procuramos pontos estacionários de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^3y - x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 12x^2y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x^3$$

$$\begin{cases} 4x^3 + 12x^2y = 1 \\ 4y^3 + 4x^3 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação diz $y^3 = -x^3$, ou seja, $y = -x$. Substituímos na primeira equação:

$$4x^3 - 12x^3 = 1 \qquad x^3 = -\frac{1}{8} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Existe portanto um único ponto estacionário $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Para classificá-lo, precisamos de usar as derivadas da segunda ordem de f nesse ponto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 24xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3$$

(2) (continuação)

$$Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -18$$

Como o determinante é negativo, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é um ponto sela

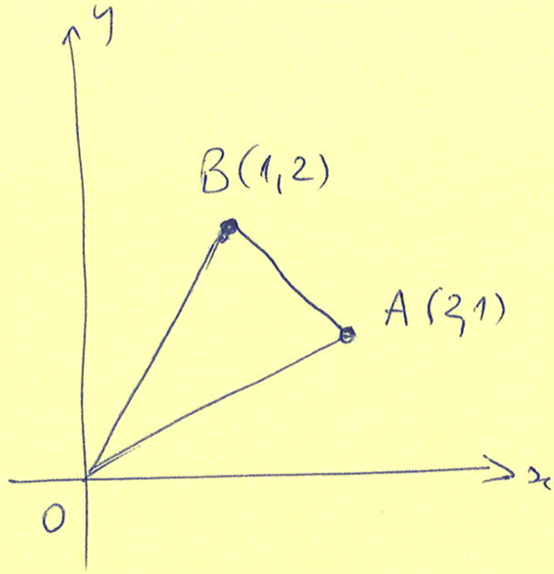
(3) $r(t) = \left(3 - t^{3/2}, (3-t)^{3/2}, 3-t\right)$

$$r'(t) = \left(-\frac{3}{2} t^{1/2}, -\frac{3}{2}(3-t)^{1/2}, -1\right)$$

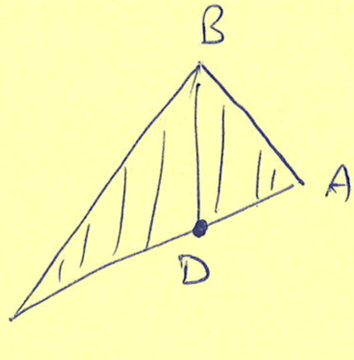
$$\|r'(t)\|^2 = \frac{9}{4} t + \frac{9}{4}(3-t) + 1 = \frac{27}{4} + 1 = \frac{31}{4}$$

$$\text{comprimento} = \int_C 1 \, ds = \int_{t=1}^{2} \frac{31}{4} \, dt = \frac{31}{4}$$

(4) Notemos que a equação da recta AB é $x+y=3$, a equação da recta OA é $x=2y$, a equação da recta OB é $y=2x$



Aplicamos o teorema de FUBINI, podemos escolher "tiras" verticais por exemplo. Por causa do ângulo em B, preferimos tratar o integral como soma de dois integrais



$$\iint_{OAB} xy\, da = \iint_{ODB} xy\, da + \iint_{ABD} xy\, da$$

$$\iint_{ODB} xy\, da = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x/2}^{2x} xy\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x/2}^{2x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left(2x^3 - \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{3}{2}\int_{x=0}^{1} x^3 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{3}{8}$$

④ (continuação)

$$\iint_{ABD} xy\,da = \int_{x=1}^{2} \int_{y=x/2}^{3-x} xy\,dy\,dx = \int_{x=1}^{2} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x/2}^{3-x} dx =$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(\frac{1}{2}x(3-x)^2 - \frac{x^3}{8}\right) dx = \dots$$

⑤ $$\int_{y=1}^{2} \int_{z=0}^{y^2} \int_{x=0}^{y+z} (2y+1)e^x\,dx\,dz\,dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} \int_{z=0}^{y^2} (2y+1) \int_{x=0}^{y+z} e^x\,dx\,dz\,dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) \int_{z=0}^{y^2} \int_{x=0}^{y+z} e^x\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) \int_{z=0}^{y^2} \left[e^x\right]_{x=0}^{y+z} dz\,dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) \int_{z=0}^{y^2} \left(e^{y+z} - e^0\right) dz\,dy =$$

$$\cancel{= \int_{y=1}^{2} (2y+1)\left(e^{y+x} - 1\right) y^2}\,dy$$

5 (continuação)

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) \left[e^{y+z} - z \right]_{z=0}^{y^2} dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1) \left(e^{y+y^2} - y^2 - e^{y} + 0 \right) dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} (2y+1)\left(e^{y+y^2} - y^2 - e^{y}\right) dy$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)\, e^{y+y^2} dy = \left[e^{y+y^2}\right]_{y=1}^{2} = e^5 - e^2$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)e^{y} dy = \int_{y=1}^{2} (2y+1)(e^{y})' dy =$$

$$= \left[(2y+1)e^{y}\right]_{y=1}^{2} - \int_{y=1}^{2} (2y+1)' e^{y} dy =$$

$$= 5e^2 - 3e - 2\int_{y=1}^{2} e^{y} dy = \cdots$$

- - - - -