Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

CÁLCULO II

Exame 7/6/2024

versão **D**

A duração do exame é de 2h30m. O exame é sem consulta. Não é permitido o uso de telemóveis ou calculadoras.

Pergunta 1 (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Troque a ordem de integração em $\displaystyle\int_{y=1}^{3}\int_{x=0}^{y^3-1} f(x,y)\,dx\,dy$.

Pergunta 2 (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Resolva a equação diferencial $u'' - 4u = 0$.

Pergunta 3 (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

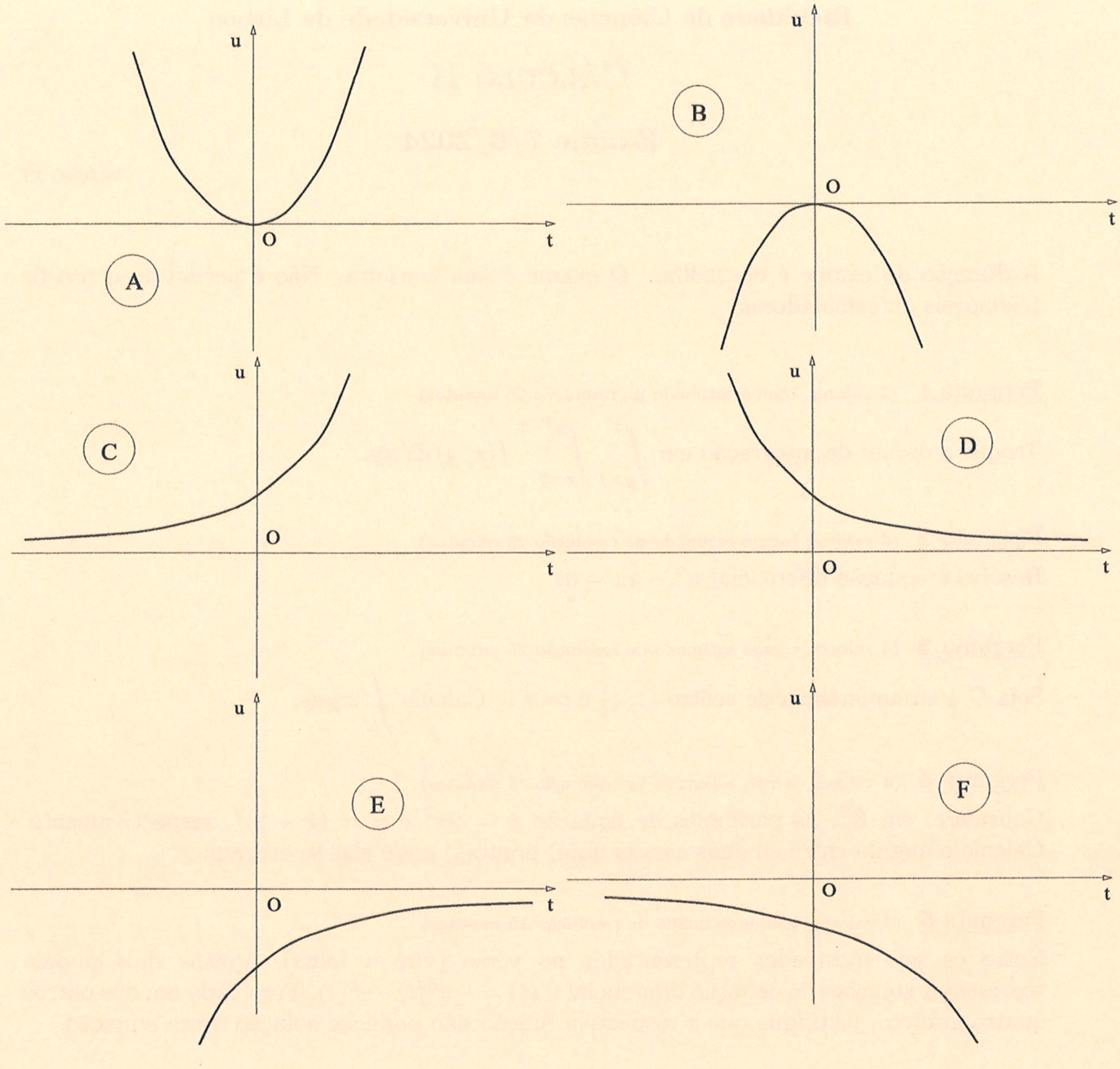
Seja C a circunferência de centro $(1,1)$ e raio 1. Calcule $\displaystyle\int_C xy\,ds$.

Pergunta 4 (4 valores, tempo estimado de resolução 25 minutos)

Considere, em $\mathbb{R}^2$, as parábolas de equação $y = 2x^2$ e $y = (x-2)^2$, respectivamente. Calcule o ângulo entre as duas curvas no(s) ponto(s) onde elas se cruzam.

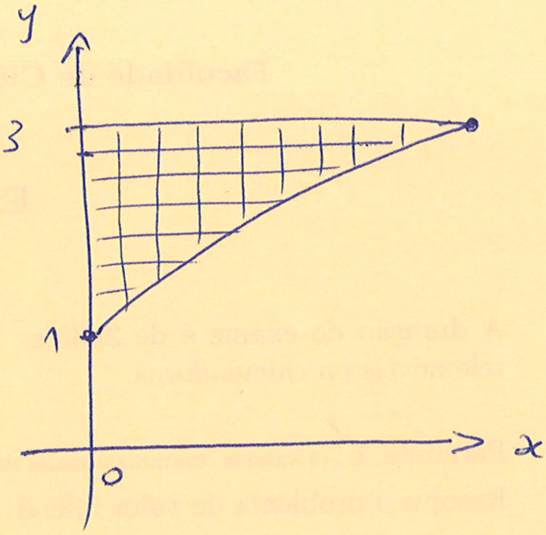
Pergunta 5 (4 valores, tempo estimado de resolução 15 minutos)

Entre os seis mostrados representados no verso (vire a folha), apenas dois podem representar soluções da equação diferencial $u'(t) = -u^6(t) - u^2(t)$. Para cada um dos outros quatro gráficos, justifique que a respectiva função não pode ser solução dessa equação.


u
O
t
A
u
B
O
t
u
C
O
t
u
D
O
t
u
E
O
t
u
F
O
t

(1)

$$\int_{y=1}^{3}\int_{x=0}^{y^3-1} f(x,y)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{x=0}^{26}\int_{y=\sqrt[3]{x+1}}^{3} f(x,y)\,dy\,dx$$

(2) $u'' = 4u$

Começamos por procurar soluções na forma

$u(t)=e^{\lambda t}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda = ?$

$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

queremos $u'' = 4u$ ou seja $\lambda^2 e^{\lambda t} = 4 e^{\lambda t}$

ou seja $\lambda^2 = 4$

Obtemos assim duas soluções independentes

$u(t) = e^{2t}$ e $u(t) = e^{-2t}$

que podem ser usadas como soluções fundamentais

Obtemos assim a família de todas as soluções

$u(t) = A e^{2t} + B e^{-2t}$

(3) Podemos usar, por exemplo, a parametrização

$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t)$

Temos $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\|r'(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\int_C xy\, ds = \int_{t=0}^{2\pi} r_1(t)\, r_2(t)\, \|r'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} (1+\cos t)(1+\sin t)\, dt =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \left(1 + \cos t + \sin t + \cos t \sin t\right) dt =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} 1\, dt + \int_{t=0}^{2\pi} \cos t\, dt + \int_{t=0}^{2\pi} \sin t\, dt +$$

$$+ \int_{t=0}^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = 2\pi + \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \sin(2t)\, dt =$$

$$= 2\pi - \frac{1}{4} \Big[\cos(2t)\Big]_{t=0}^{2\pi} = 2\pi - \frac{1}{4}\left(\cos(4\pi) - \cos 0\right) = 2\pi$$

~~(3) Podemos usar, por exemplo, a parametrização~~

~~$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (\cos t, \sin t)$~~

~~Temos $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$~~

~~$\|r'(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$~~

$$\cancel{\int_C xy\, ds = \int_{t=0}^{2\pi} r_1(t)\, r_2(t)\, \|r'(t)\|\, dt =}$$

$$\cancel{= \int_{t=0}^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \sin(2t)\, dt =}$$

$$\cancel{= -\frac{1}{4} \Big[\cos(2t)\Big]_{t=0}^{2\pi} = -\frac{1}{4} \Big(\cos(4\pi) - \cos 0\Big) = 0}$$

(4) Começamos por procurar pontos comuns às duas parábolas. Basta resolver a equação $2x^2 = (x-2)^2$ cujas soluções são $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Podemos parametrizar as parábolas assim

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad q(t) = (t, 2t^2), \quad r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (t, (t-2)^2)$

Os pontos comuns correspondem a valores do parâmetro $t = -2 \pm 2\sqrt{2}$. As coordenadas desses pontos comuns são $(-2-2\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2})$, $(-2+2\sqrt{2}, 24-16\sqrt{2})$. Precisamos de calcular o ângulo entre $q'(t)$ e $r'(t)$ para cada um dos valores relevantes de t.

④ (continuação)

$q'(t) = (1, 4t)$ $\qquad$ $r'(t) = (1, 2(t-2))$

~~[illegible]~~ $q'(-2-2\sqrt{2}) = (1, -8-8\sqrt{2})$

$\|q'(-2-2\sqrt{2})\|^2 = 1 + 64(1+\sqrt{2})^2 =$

$= 1 + 64(1+2\sqrt{2}+2) = 193 + 128\sqrt{2}$

$r'(-2-2\sqrt{2}) = (1, -8-4\sqrt{2})$

$\|r'(-2-2\sqrt{2})\|^2 = 1 + 16(2+\sqrt{2})^2 =$

$= 1 + 16(4 + 4\sqrt{2} + 2) = 97 + 64\sqrt{2}$

$q'(-2-2\sqrt{2}) \cdot r'(-2-2\sqrt{2}) = (1, -8-8\sqrt{2}) \cdot (1, -8-4\sqrt{2}) =$

$= 1 + 8(1+\sqrt{2}) \cdot 4(2+\sqrt{2}) = 1 + 32(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) =$

$= 1 + 32(2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2) = 1 + 32(4+3\sqrt{2}) =$

$= 129 + 96\sqrt{2}$

Portanto o ângulo que procuramos tem coseno igual a $\dfrac{129+96\sqrt{2}}{\sqrt{193+128\sqrt{2}}\ \sqrt{97+64\sqrt{2}}}$

Para o outro ponto comum, em $t = -2+2\sqrt{2}$, os cálculos são semelhantes

(5) Observamos que a quantidade $-u^6-u^2$ é sempre negativa (ou zero). Por isso, as soluções desta equação diferencial são todas decrescentes. Isso significa que os gráficos A, B, C e E não podem representar soluções desta equação diferencial