Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Matemática Computacional

Exame 11/6/2024

A duração do exame é de 2h30m. É permitido o uso de calculadoras gráficas. Cada aluno pode ter uma folha A4 com apontamentos, escrita de ambos os lados.

Pergunta 1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que f' nunca se anula. Seja $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Se $x^* \in \mathbb{R}$ for um ponto fixo de g, prove que $g'(x^*) = 0$.

Pergunta 2 Seja $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função linear tal que, para todos os vectores $x \in \mathbb{R}^n$ de norma igual a 1, $|\ell(x)| \leq 3$. Prove que $|\ell(x)| \leq 3\|x\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Pergunta 3 Descreva o algoritmo de Gauss-Seidel nas suas duas formulações: por coordenadas e na forma matricial.

Pergunta 4 A função $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^3$, é uma contracção?

① Seja $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ Então

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Se x^* é um ponto fixo de g, temos $g(x^*) = x^*$
portanto $f(x^*)=0$ portanto $g'(x^*)=0$

② Temos $\ell(\vec{0}) = 0 \leq 3\|\vec{0}\|$

Seja $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq \vec{0}$
Seja $Y = \frac{X}{\|X\|}$ Temos que $\|Y\| = 1$

pelo que $|\ell(Y)| \leq 3$
Mas $\ell(Y) = \ell\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{\ell(X)}{\|X\|}$

então $|\ell(Y)| \leq 3 \Rightarrow |\ell(X)| \leq 3\|X\|$ q.e.d.

3 Seja A uma matriz quadrada.
Supomos que os elementos diagonais de A não se anulam, $a_{ii} \neq 0$

O algoritmo de Gauss-Seidel ~~recebe um~~ recebe um vector inicial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e constrói uma sucessão de vectores $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ definidos assim

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - a_{14} x_4^{(k)} - \dots \right)$$

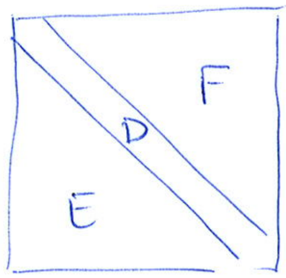
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} - a_{24} x_4^{(k)} - \dots \right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} - a_{34} x_4^{(k)} - \dots \right)$$

Se essa sucessão convergir, o vector limite satisfará ~~a equação~~ o sistema de equações

$$AX = b$$

Podemos escrever a matriz A como $E + D + F$ onde

$A =$ 

D é uma matriz diagonal
E é uma matriz triangular inferior
F é uma matriz triangular superior

③ (continuação)

Então o método de Gauss-Seidel pode ser descrito na forma

~~$DX^{(k+1)}$~~

$$DX^{(k+1)} = b - EX^{(k+1)} - FX^{(k)}$$

ou seja $(D+E)X^{(k+1)} = b - FX^{(k)}$

ou ainda $X^{(k+1)} = (D+E)^{-1}(b - FX^{(k)})$

④ A função $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=x^3$ não é uma contração. Por exemplo:

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ $\quad f(1) = 1$

$\text{dist}(\frac{1}{2},1) = \frac{1}{2}$ $\quad \text{dist}(\frac{1}{8},1) = \frac{7}{8}$

contradição