EXERCÍCIOS – FOLHA 2

2.1. Em $\mathbb{R}^{3\times 1}$, considere os vectores $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Justifique que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ e determine a expansão de Fourier dos vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ com respeito a esta base.

2.2. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{C}^{m\times 1}$. Prove que

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \overline{\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{x} \rangle} \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{y} \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_i \rangle \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{v}_i \rangle}$$

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{m\times 1}$.

2.3. Determine bases ortonormais para $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ e $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

2.4. Verifique se a matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{i}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2i}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

é unitária.

2.5. (a) Caso existam, determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & -(\alpha - \beta) \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

é ortogonal.

(b) Caso existam, determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta i \\ \alpha & 0 & \beta i & 0 \\ 0 & \beta i & 0 & \alpha \\ \beta i & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

é unitária.

2.6. Prove que:

(a) Se $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ forem matrizes unitárias, então $\mathbf{UV} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ também é uma matriz unitária.

(b) Se $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ forem matrizes unitárias, então $\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$ também é uma matriz unitária.

[As afirmações são verdadeiras substituindo $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ e "unitária" por "ortogonal".]

2.7. Prove que, se $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for uma matriz unitária, então

$$\langle \mathbf{Uu} | \mathbf{Uv} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. [A afirmação é verdadeira substituindo $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ e "unitária" por "ortogonal".]