EXERCÍCIOS – FOLHA 3

3.1. Para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, definimos
$$\mathbf{R_u} = \mathbf{I}_n - \frac{2}{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\mathbf{u}^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
(note que $\mathbf{R_u} = \mathbf{I}_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ quando $\|\mathbf{u}\| = 1$). Prove que:

(a) $(\mathbf{R_u})^2 = \mathbf{I}_n$ e conclua que $(\mathbf{R_u})^* = (\mathbf{R_u})^{-1} = \mathbf{R_u}$.

(b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tiver a primeira coordenada $v_1 \neq 0$ e se
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \pm \mu\|\mathbf{v}\|\mathbf{e}_1 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$
onde $\mathbf{e}_1$ é o primeiro vector da base canónica de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e
$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{se } v_1 \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{v_1}{|v_1|}, & \text{se } v_1 \notin \mathbb{R}, \end{cases}$$
então:

(i) $\mathbf{R_u}\mathbf{v} = \mp\|\mathbf{v}\|\mathbf{e}_1$.

(ii) Supondo que $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\mathbf{U} = \mp\mu\mathbf{R_u}$ é uma matriz unitária que tem $\mathbf{v}$ como primeira coluna.

3.2. Usando o exercício anterior, determine uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ cuja primeira coluna é $\mathbf{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

3.3. Cao exista, determine uma matriz ortogonal $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que a matriz
$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix} 13 & -9 \\ 16 & -11\end{bmatrix}\mathbf{P}$$
seja triangular superior.

3.4. Para cada uma das matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ indicadas abaixo, determine uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que a matriz $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ seja triangular superior:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$