EXERCÍCIOS – FOLHA 6

6.1. Prove que $\| \star \|_1$ e $\| \star \|_\infty$ são de facto normas em $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

6.2. Prove que:

(a) Para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\|\mathbf{v}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \|\mathbf{v}\|_1$.

(b) Para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\|\mathbf{v}\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|_2$ e $\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|_\infty$.

6.3. Seja $\| \star \|$ uma norma em $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Prove que

$$\big|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\big| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

6.4 (desigualdade de Hölder). Prove que, se $p, q \in \mathbb{N}$ forem tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$|\mathbf{u}^*\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|_p \, \|\mathbf{v}\|_q, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

[*Sugestão.* Considere a função $f(x) = (1-\lambda) + \lambda x - x^\lambda$, $0 < x < 1$, para provar que

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+,$$

e conclua que

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^q = 1$$

para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_q = 1$.

6.5. Usando a desigualdade de Hölder, prove que, se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ for tal que $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} u_i = 0$, então

$$|\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|_1 \left(\frac{v_{\max} - v_{\min}}{2}\right), \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1};$$

para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, pomos $v_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} v_i$ e $v_{\min} = \min_{1\leqslant i\leqslant n} v_i$.

6.6. Seja $p \geqslant 1$ um número real (arbitrário).

(a) Prove a desigualdade de Minkowski:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_p \leqslant \|\mathbf{u}\|_p + \|\mathbf{v}\|_p, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

[*Sugestão.* Observe que

$$|\alpha + \beta|^p \leqslant |\alpha| \, |\alpha + \beta|^{p-1} + |\beta| \, |\alpha + \beta|^{p-1}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

e use a desigualdade de Hölder com p e $q = \frac{p}{p-1}$.]

(b) Conclua que $\| \star \|_p$ é de facto uma norma em $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Além disso, prove que

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{v}\|_p, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

6.7. Determine a norma euclideana das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.8. Determine a norma espectral $\|\mathbf{A}\|_s$ da matriz

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{A}$ é invertível e calcule $\|\mathbf{A}^{-1}\|_s$.

6.9. Considere as normas vectoriais $\| \star \|_1$ e $\| \star \|_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e as respectivas normas matriciais $\| \star \|_1'$ e $\| \star \|_\infty'$ induzidas em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Prove que

$$\|\mathbf{A}\|_1' = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{A}\|_\infty' = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}|, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Calcule $\|\mathbf{A}\|_1'$ e $\|\mathbf{A}\|_\infty'$ para $\mathbf{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix}$.

6.10. Calcule a norma espectral $\| \star \|_s$ e as normas induzidas $\| \star \|_1'$ e $\| \star \|_\infty'$ de cada uma das matrizes do Exercício 5.7.

6.11. Seja $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz invertível, seja $\| \star \|$ uma norma matricial em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e defina $\| \star \|_P \colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ por

$$\|\mathbf{A}\|_\mathbf{P} = \|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\|, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Prove que $\| \star \|_P$ é uma norma matricial.

6.12. Demonstre a Proposição 8.4.

6.13. Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos o RESOLVENTE de A como sendo a função de variável complexa $\mathbf{R} \colon \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por

$$\mathbf{R}(z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathbf{A}).$$

Prove que, se $\| \star \| \colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ for a norma matricial induzida por uma norma $\| \star \| \colon \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, então

$$\|\mathbf{R}(z)\| \leqslant \frac{1}{|z| - \|\mathbf{A}\|}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathbf{A}),\ |z| > \|\mathbf{A}\|.$$

6.14. Considere a norma euclideana $\|\star\|_2$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ todos os valores singulares (com repetições) de $\mathbf{A}$. Prove que $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$.

6.15. Prove que, se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ forem normais, então $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_s$ e $\rho(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leqslant \rho(\mathbf{A})\rho(\mathbf{B})$.

6.16. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r > 0$ os valores singulares de $\mathbf{A}$. Prove que:

(a) $|\lambda| \leqslant \sigma_1$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$.

(b) Se $\mathbf{A}$ for invertível, então $\sigma_r \leqslant |\lambda|$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$.

6.17. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

(a) Calcule $\mathbf{A}^k$ e $\rho(\mathbf{A}^k)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(b) Justifique que $\rho(\mathbf{A}^k) = \rho(\mathbf{A})^k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(c) Que pode dizer sobre $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$, $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_s$, $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_1'$ e $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_\infty'$, onde $\|\star\|_1'$ e $\|\star\|_\infty'$ são as normas induzidas por $\|\star\|_1$ e $\|\star\|_\infty$, respectivamente.

6.18. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ e, escolhendo $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, defina a sucessão $\big(\mathbf{v}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ por $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}_k = 0$ (independentemente da escolha de $\mathbf{v}_0$).