EXERCÍCIOS – FOLHA 8

8.1. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz diagonalizável, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os valores próprios de $\mathbf{A}$ (com repetições) e seja $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz invertível tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Para qualquer função $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que , defina

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Supondo que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para quaisquer $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$, prove que:

(a) Para qualquer função $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}$,

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{G}_1 + \cdots f(\lambda_r)\mathbf{G}_r$$

onde $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_r \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são projectores espectrais de $\mathbf{A}$ (como definidos no Exemplo 5.1).

(b) Para qualquer função $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}$, existe um polinómio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ com grau $\leqslant r-1$ tal que $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ (de modo que $f(\mathbf{A})$ é uma expressão polinomial em $\mathbf{A}$ com grau $\leqslant r-1$).

(c) Se uma função $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admitir um desenvolvimento em série de potências $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}_0^+ \cap \{\infty\}$ e se $\rho(\mathbf{A}) < R$, então $f(\mathbf{A}) = \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathbf{A}^k$.

(d) Os projectores espectrais $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_r$ de $\mathbf{A}$ são dados pelas fórmulas

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{\prod_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}(\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} (\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I}_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant r;$$

deste modo, $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_r$ são univocamente determinados.

(e) Para qualquer função $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}$, a matriz $f(\mathbf{A}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ não depende da escolha da matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ é diagonal.

8.2. Usando uma série de potências, calcule a inversa da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.3. Calcule $\cos(\mathbf{A})$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\pi/2 & \pi/2 \\ \pi/2 & -\pi/2 \end{bmatrix}$.

8.4. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\beta \neq -\alpha$ e seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}$. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

8.5. Prove que $\cos^2(\mathbf{A}) + \operatorname{sen}^2(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_n$ para qualquer matriz diagonalizável $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Que pode dizer quando $\mathbf{A}$ não é diagonalizável?

8.6. Seja $\big(\mathbf{A}_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ uma sucessão em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e suponha que a série $\mathbf{F}(z) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{A}_k z^k$ tem raio de convergência $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, de modo que a correspondência $z \mapsto \mathbf{F}(z)$ define uma função $\mathbf{F}\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ onde $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$. Prove que:

(a) $\mathbf{F}(t)$ é indefinidamente diferenciável(*) e $\mathbf{A}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{F}^{(k)}(0)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Se $\mathbf{F}'(z) = \mathbf{A}\mathbf{F}(z)$ para alguma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, então existe uma matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}e^{z\mathbf{A}}$ para qualquer $z \in \mathcal{B}$.

8.7. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ e considere a função $\mathbf{F}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por

$$\mathbf{F}(z) = e^{z(\mathbf{A}+\mathbf{B})} - e^{z\mathbf{A}}e^{z\mathbf{B}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Prove que

$$\mathbf{F}'(z) = (A+B)\mathbf{F}(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

e conclua que $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.

8.8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz anti-hermítica (isto é, tal que $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$). Prove que $e^{\mathbf{A}}$ é uma matriz unitária.

8.9. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Prove que:

(a) Se $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for invertível, então $e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}$.

(*)Da Análise Complexa, sabe-se que, se $\mathbf{F}\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ for uma função holomorfa em $\mathcal{B}$ (isto é, diferenciável em todos os pontos de $\mathcal{B}$), então $\mathbf{F}$ será indefinidamente diferenciável em $\mathcal{B}$ e, além disso, admite a expansão em série de potências

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathbf{F}^{(k)}(0)}{k!}\, z^k, \qquad z \in \mathcal{B}.$$

(b) $\sigma(e^{\mathbf{A}}) = \{e^{\lambda} \colon \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$ e $\text{m.a.}(e^{\lambda}) = \text{m.a.}(\lambda)$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$.

(c) $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\operatorname{tr}(\mathbf{A})}$ onde $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,i}$. [*Sugestão.* Recorde que $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$ para quaisquer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.]