EXERCÍCIOS – FOLHA 9

9.1. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz tal que $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}^{(\dagger)}$. Prove que 0 é o único valor próprio de $\mathbf{A}$ e que existe uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(0) \end{bmatrix}$$

onde $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ são tais que $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Além disso, justifique que $n_1 = \min\left\{k \in \mathbb{N}\colon \mathbf{A}^k = \mathbf{0}\right\}^{(\ddagger)}$.

9.2. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz nilpotente com índice $k \in \mathbb{N}$ e, para cada $0 \leqslant i \leqslant k$, seja $\mathcal{V}_i = \mathcal{R}(\mathbf{A}^i) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Prove que:

(a) $\mathcal{V}_k = \{\mathbf{0}\}$, $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{R}(\mathbf{A}^{k-1})$ e $\mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(b) $\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}_k \subsetneq \mathcal{V}_{k-1} \subsetneq \cdots \mathcal{V}_2 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

(c) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k-1$, tem-se $\dim \mathcal{V}_i = r(\mathbf{A}^i) - r(\mathbf{A}^{i+1})$.

9.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz nilpotente com índice $k \in \mathbb{N}$ e considere a cadeia

$$\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}_k \subsetneq \mathcal{V}_{k-1} \subsetneq \cdots \mathcal{V}_2 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

onde, para cada $1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathcal{V}_i = \mathcal{R}(\mathbf{A}^i) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Além disso, sejam $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1} \subseteq \mathbb{C}^{n\times 1}$ subconjuntos disjuntos tais que, para qualquer $0 \leqslant i \leqslant k-1$, a união $\mathcal{S}_{k-1} \cup \cdots \cup \mathcal{S}_i$ é uma base de $\mathcal{V}_i$; em particular, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{k-1}$ é uma base de $\mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Prove que:

(a) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$, tem-se $\#(\mathcal{S}_i) = r(\mathbf{A}^i) - 2r(\mathbf{A}^{i+1}) + r(\mathbf{A}^{i+2})$.

(b) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$ e qualquer $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_i$, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}^i\mathbf{v} = \mathbf{s}$.

(c) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k-1$ e qualquer $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_i$, se $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ for tal que $\mathbf{A}^i\mathbf{v} = \mathbf{s}$, então $\mathcal{J}_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{A}^i\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ é um subconjunto linearmente independente$^{(\S)}$ e tem-se

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^i\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v} & \mathbf{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^i\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v} & \mathbf{v}\end{bmatrix}\mathbf{J}_{i+1}(0).$$

(†) Nestas condições, dizemos que $\mathbf{A}$ é uma MATRIZ NILPOTENTE.

(‡) A n_1 chamamos o ÍNDICE DE NILPOTÊNCIA de $\mathbf{A}$.

(§) A um subconjunto desta forma chamamos uma CADEIA DE JORDAN para $\mathbf{A}$.

(d) A união $\mathcal{J} = \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathcal{S}} \mathcal{J}_{\mathbf{s}}$ é uma base de $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(e) Pondo $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_r\}$ e definindo, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, $\mathbf{J}_i \in \mathbb{C}^{n\times(i+1)}$ como sendo a matriz cujas colunas formam uma cadeia $\mathcal{J}_{\mathbf{s}_i}$, a matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_r\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é invertível e tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{m_1}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m_2}(0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{m_r}(0) \end{bmatrix}$$

para alguns $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tais que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$.

(f) $k = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$ e, para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$, tem-se $\#\{1 \leqslant s \leqslant r : m_s = i\} = r(\mathbf{A}^i) - 2r(\mathbf{A}^{i+1}) + r(\mathbf{A}^{i+2})$.

9.4. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz nilpotente com índice $k \in \mathbb{N}$ e, para cada $1 \leqslant i \leqslant k$, seja $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times r_i}$, onde $r_i = r(\mathbf{A}^i)$, uma matriz cujas colunas formam uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{A}^i)$. Prove que, se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ for uma base de $\mathcal{N}(\mathbf{AB})$, então $\{\mathbf{B}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{B}\mathbf{v}_s\}$ será uma base de $\mathcal{V}_i = \mathcal{R}(\mathbf{A}^i) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

9.5. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

Prove que $\mathbf{A}$ é nilpotente e que existe uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_3(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_1(0) \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $\mathbf{P}$ seguindo o algoritmo descrito nos exercícios anteriores.

9.6. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Prove que $\mathbf{A}$ é nilpotente e que existe uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2(0) \end{bmatrix}$. Determine a matriz $\mathbf{P}$.

9.7. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 41 & 30 & 15 & 7 & 4 & 6 & 1 & 3 \\ -54 & -39 & -19 & -9 & -6 & -8 & -2 & -4 \\ 9 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -32 & -24 & -13 & -6 & -2 & -5 & -1 & -2 \\ -10 & -7 & -2 & 0 & -3 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 17 & 12 & 6 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{8\times 8}.$$

Prove que $\mathbf{A}$ é nilpotente e determine a sua forma canónica de Jordan.

9.8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz arbitrária e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de $\mathbf{A}$. Prove que, na forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$:

(a) O maior bloco de Jordan associado a λ é de tamanho $k \times k$ onde

$$k = \min\big\{m \in \mathbb{N}\colon r\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^m\big) = r\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^{m+1}\big)\big\}\ ^{(*)}$$

(b) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$, o número $\nu_i(\lambda)$ de blocos de Jordan associado a λ com tamanho $i \times i$ é dado por

$$\nu_i(\lambda) = r\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^{i-1}\big) - 2r\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^{i}\big) + r\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^{i+1}\big).$$

9.9. Determine a forma canónica de Jordan da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

9.10. A forma canónica de Jordan de uma dada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{9\times 9}$ é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_3(4) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2(4) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2(3) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_1(2) & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{J}_1(2) \end{bmatrix}.$$

Determine $\sigma(\mathbf{A})$ e, para cada $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, indique a multiplicidade algébrica m.a.(λ) e a multiplicidade geométrica m.g.(λ) de λ. Qual é o polinómio característico $p_{\mathbf{A}}(x)$ de $\mathbf{A}$.

$^{(*)}$A k chamamos o ÍNDICE de λ.

9.11. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz arbitrária e seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, seja

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{R}\big((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^i\big) \cap \mathcal{N}\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n\big)$$

e considere a cadeia

$$\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}_k \subsetneq \mathcal{V}_{k-1} \subsetneq \cdots \mathcal{V}_2 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n).$$

Além disso, sejam $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1} \subseteq \mathbb{C}^{n\times 1}$ subconjuntos disjuntos tais que, para qualquer $0 \leqslant i \leqslant k-1$, a união $\mathcal{S}_{k-1} \cup \cdots \cup \mathcal{S}_i$ é uma base de $\mathcal{V}_i$; em particular, $\mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{k-1}$ é uma base de $\mathcal{V}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$ e qualquer $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_i$, seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}^i\mathbf{v} = \mathbf{s}$ e considere a matriz

$$\mathbf{J}_{\mathbf{s}}(\lambda) = \big[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)^i\mathbf{v} \ \cdots \ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v}\ \mathbf{v}\big] \in \mathbb{C}^{n\times(i+1)}.$$

Com base nesta construção (e tendo em conta o Exercício 9.3) indique uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ esteja na forma canónica de Jordan.

9.12. Usando o método descrito no exercício anterior, construa uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{P}$$

esteja na forma canónica de Jordan.