EXERCÍCIOS – FOLHA 10

10.1. Considere o produto interno canónico $\langle\cdot|\cdot\rangle$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e, para $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ aplique o processo de Gram-Schmidt à sequência $\mathbf{I}_n,\mathbf{A},\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3,\ldots$, isto é, defina as matrizes $\mathbf{U}_0,\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2,\mathbf{U}_3,\ldots$ onde

$$\mathbf{U}_0=\frac{1}{\|\mathbf{I}_n\|}\mathbf{I}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{I}_n,$$
$$\mathbf{U}_i=\frac{1}{\left\|\mathbf{A}^i-\sum_{1\leqslant j\leqslant i-1}\langle\mathbf{U}_j|\mathbf{A}^i\rangle\mathbf{U}_j\right\|}\left(\mathbf{A}^i-\sum_{1\leqslant j\leqslant i-1}\langle\mathbf{U}_j|\mathbf{A}^i\rangle\mathbf{U}_j\right),\qquad i=1,2,3,\ldots$$

Seja $k\in\mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $\mathbf{A}^k-\sum_{1\leqslant j\leqslant k-1}\langle\mathbf{U}_j|\mathbf{A}^k\rangle\mathbf{U}_j=\mathbf{0}$. Prove que:

(a) $\langle\mathbf{U}_0,\mathbf{U}_1,\ldots,\mathbf{U}_{k-1}\rangle=\left\langle\mathbf{I}_n,\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}^{k-1}\right\rangle$.

(b) Existem $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{A}^k=\alpha_0\mathbf{I}_n+\alpha_1\mathbf{A}+\cdots+\alpha_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}$.

(c) $m_{\mathbf{A}}(z)=z^k-\alpha_{k-1}z^{k-1}-\cdots-\alpha_1 z-\alpha_0\in\mathbb{C}[z]$ é o polinómio mínimo de $\mathbf{A}$.

(d) Pondo $\nu_0=\|\mathbf{I}_n\|$, $\nu_i=\left\|\mathbf{A}^i-\sum_{1\leqslant j\leqslant i-1}\langle\mathbf{U}_j|\mathbf{A}^i\rangle\mathbf{U}_j\right\|$, para $1\leqslant i\leqslant k$, e $r_{i,j}=\langle\mathbf{U}_i|\mathbf{A}^j\rangle$, para $0\leqslant i<j\leqslant k$, tem-se

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{A}^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_0 & \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_0 & r_{0,1} & \cdots & r_{0,k-1} & r_{0,k}\\ 0 & \nu_1 & \cdots & r_{1,k-1} & r_{1,k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \nu_{k-1} & r_{k-1,k}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(e) Pondo

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\nu_0 & r_{0,1} & \cdots & r_{0,k-1}\\ 0 & \nu_1 & \cdots & r_{1,k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \nu_{k-1}\end{bmatrix}\qquad\text{e}\qquad\mathbf{c}=\begin{bmatrix}r_{0,k}\\ r_{1,k}\\ \vdots\\ r_{k-1,k}\end{bmatrix},$$

temos

$$\mathbf{A}^k=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_0 & \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_{k-1}\end{bmatrix}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\end{bmatrix}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{c},$$

logo $\begin{bmatrix}\alpha_0 \; \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-1}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{c}$.

10.2. Determine o polinómio mínimo da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

10.3. Determine o polinómio mínimo da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & -1 & 4 & -4 \\ -16 & -8 & 17 & -16 \\ -6 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

10.4. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tem polinómio mínimo $m_{\mathbf{A}}(z) = (z-\lambda)(z-\mu)^2$ e polinómio característico $p_{\mathbf{A}}(z) = (z-\lambda)^2(z-\mu)^4$. Qual é a forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$?

10.5. Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo e o mesmo polinómio característico, mas que o recíproco não é necessariamente verdadeiro.

10.6. Prove que, se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ forem matrizes não-derrogatórias com o mesmo polinómio mínimo, então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ serão semelhantes.

10.7. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Dizemos que $\nu(z) \in \mathbb{C}[z]$ é um POLINÓMIO ANULADOR de $\mathbf{v}$ com respeito a $\mathbf{A}$ se $\nu(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Prove que:

(a) Existe um e um só polinómio anulador de $\mathbf{v}$ com respeito a $\mathbf{A}$ que é mónico e tem grau mínimo (entre todos os polinómios anuladores de $\mathbf{v}$ com respeito a $\mathbf{A}$); a este polinómio chamamos o POLINÓMIO MÍNIMO de $\mathbf{v}$ com respeito a $\mathbf{A}$ e denotamo-lo por $m_{\mathbf{v},\mathbf{A}}(z)$.

(b) Se $k \in \mathbb{N}$ for o menor natural tal que $\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{A}^k\mathbf{v}\}$ é um subconjunto linearmente dependente de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e se $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$ forem tais que

$$\mathbf{A}^k\mathbf{v} = -\alpha_0\mathbf{v} - \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{v} - \cdots - \alpha_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v},$$

então $m_{\mathbf{v},\mathbf{A}}(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{k-1}z^{k-1} + z^k$.

(c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e $\nu_i(z) = m_{\mathbf{v}_i,\mathbf{A}}(z)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, então

$$m_{\mathbf{A}}(z) = \operatorname{mmc}(\nu_1(z), \ldots, \nu_n(z)).$$

10.8. Determine $m_{\mathbf{v},\mathbf{A}}(z) \in \mathbb{C}[z]$ para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

10.9. Usando o Exercício 10.7, determine o polinómio mínimo das matrizes

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} -7 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & -1 & 4 & -4 \\ -16 & -8 & 17 & -16 \\ -6 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$