EXERCÍCIOS – FOLHA 11

11.1. Seja $z \mapsto f(z)$ uma função complexa de variável complexa e considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Suponha que $f(\mathbf{A})$ está definida e descreva $f(\mathbf{A})$ em termos dos projectores espectrais de $\mathbf{A}$ e particularize para $f(z) = \sqrt{z}$ e $f(z) = e^z$.

11.2. Usando as funções $z \mapsto \cos(z)$ e $z \mapsto \operatorname{sen}(z)$, justifique que $\cos^2(\mathbf{A}) + \operatorname{sen}^2(\mathbf{A}) = 1$ para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

11.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tais que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

(a) Usando a função $z \mapsto e^{tz}$ onde $t \in \mathbb{R}$, justifique que

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant k_i-1} \frac{t^k e^{t\lambda_i}}{k!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^k \right) \mathbf{G}_i$$

onde $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são os projectores espectrais de $\mathbf{A}$ (associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente) e onde $\mathbb{k}_i = \operatorname{ind}(\lambda_i)$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant r$.

(b) Prove que, para qualquer $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\mathbf{u}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ é a única solução da equação diferencial

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{c}.$$

(c) Na notação das alíneas anteriores, prove que

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \sum_{0\leqslant k\leqslant k_i-1} \frac{t^k e^{t\lambda_i}}{k!} \mathbf{v}_k(\lambda_i)$$

onde

$$\mathbf{v}_k(\lambda_i) = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)\Big)\mathbf{G}_i \mathbf{c}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant k_i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant r.$$

11.4. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tais que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ e sejam $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são os projectores espectrais de $\mathbf{A}$ (associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente). Prove que, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\mathbf{G}_i = f_i(\mathbf{A}), \qquad f_i(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z = \lambda_i, \\ 0, & \text{se } z \neq \lambda_i, \end{cases}$$

e justifique que $\mathbf{G}_i = p_i(\mathbf{A})$ para algum polinómio $p_i(z) \in \mathbb{C}[z]$.

11.5. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tais que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ e sejam $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são os projectores espectrais de $\mathbf{A}$ (associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente). Prove que

$$\mathbf{A}^m = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \Bigg(\sum_{0\leqslant k\leqslant k_i-1} \binom{m}{k} \lambda_i^{m-k} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^k \Bigg) \mathbf{G}_i, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

11.6. Calcule $f(\mathbf{A})$ para $f(z) = 4\sqrt{z} - 1$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -9 \\ 5 & 11 & 9 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

11.7. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tais que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Prove que, se $z \mapsto f(z)$ for qualquer função complexa de variável complexa tal que $f(\mathbf{A})$ está definida, então

$$f(\lambda) \in \sigma(\mathbf{A}) \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{A})\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}.$$

11.8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $z \mapsto f(z)$ uma função complexa de variável complexa tal que $f(\mathbf{A})$ está definida. Prove que $f(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ está definida e que $f(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = f(\mathbf{A})^{\mathsf{T}}$.

11.9. Prove que:

(a) $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n$ para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(b) $(e^{\mathbf{A}})^\alpha = e^{\alpha\mathbf{A}}$ para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

(c) $e^{i\mathbf{A}} = \cos(\mathbf{A}) + i\,\mathrm{sen}(\mathbf{A})$ para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

11.10. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Determine um polinómio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ tal que $e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A})$.

11.11. Considere as matrizes

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Diga quais são convergentes e quais são somáveis à Cesàro.

(b) Determine o limite das que são convergentes e a soma das que são somáveis à Cesàro.

11.12. Prove que, se $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for convergente, então $\mathbf{A}$ será somável à Cesàro.