EXERCÍCIOS – FOLHA 12

12.1. Verifique o teorema de Perron calculando os valores próprios e os vectores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Quais são os vectores de Perron à direita e à esquerda?

12.2. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Prove que:

(a) Se $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, então $\rho(\mathbf{A}) > 0$.

(b) $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ se e só se $\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A} > 0$.

(c) Se $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{Au} > \mathbf{0}$.

(d) Se $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$, então $\mathbf{Au} \geqslant \mathbf{Av}$.

(e) Se $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

(f) Se $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} > \mathbf{v} > \mathbf{0}$, então $\mathbf{Au} > \mathbf{Av}$.

12.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Prove que $\mathbf{A}$ tem um e um só o vector de Perron à direita e um e um só vector de Perron à esquerda.

12.4. Determine a raíz de Perron e o vector de Perron da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$ são tais que $\alpha + \beta = 1$.

12.5. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} > 0$, e $r = \rho(\mathbf{A})$. Prove que:

(a) O limite $\lim_{k\to\infty}(r^{-1}\mathbf{A})^k$ existe.

(b) $1 \in \mathbb{R}$ é valor próprio de $r^{-1}\mathbf{A}$ e $\lim_{k\to\infty}(r^{-1}\mathbf{A})^k = \mathbf{G}$ onde $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é o projector espectral de $r^{-1}\mathbf{A}$ associado a 1.

(c) $r(\mathbf{G}) = 1$.

12.6. Seja G um grafo orientado com vértices $\mathcal{V}(G) = \{P_1, \ldots, P_m\}$ e arestas $\mathcal{E}(G) = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Definimos a MATRIZ DE INCIDÊNCIA $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pondo

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } E_j \text{ termina em } P_i, \\ -1, & \text{se } E_j \text{ começa em } P_i, \\ 0, & \text{se } E_j \text{ não termina, nem começa, em } P_i, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Prove que:

(a) Se $\mathbf{e} = \begin{bmatrix}1\ 1\ \cdots\ 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, então $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

(b) $r(\mathbf{A}) \leqslant m - 1$.

(c) G é conexo se e só se $r(\mathbf{A}) = m - 1$.

12.7. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Definimos o grafo orientado $G = G(\mathbf{A})$ com vértices $\mathcal{V}(G) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ e em que, para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$, existe uma aresta $P_i \to P_j$ se e só se $a_{i,j} \neq 0$. Prove que G é fortemente conexo se e só se $\mathbf{A}$ é uma matriz irredutível(*).

12.8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$. Prove que, se $\mathbf{A}$ é irredutível, então $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{n-1} > \mathbf{0}$.

12.9. Verifique se a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é primitiva.

12.10. Divida a população de fêmeas de certa espécie em grupos etários $G_1, \ldots, G_n$ de modo que

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\text{fêmeas com idade inferior a 10 anos}\}, \\ G_2 &= \{\text{fêmeas com idade entre 10 e 20 anos}\}, \\ G_3 &= \{\text{fêmeas com idade entre 20 e 30 anos}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para cada $1 \leqslant k \leqslant n$ e cada $t \in \mathbb{N}_0$, seja $f_k(t)$ o número de fêmeas no grupo G_k no t-ésimo ano, de modo que existem $b_1, \ldots, b_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} f_1(t+1) &= f_1(t)b_1 + f_2(t)b_2 + \cdots + f_n(t)b_n, \\ f_k(t+1) &= f_{k-1}(t)s_{k-1}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n; \end{aligned}$$

(*)Dizemos que $\mathbf{A}$ é REDUTÍVEL se existir uma matriz de permutação $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ onde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são matrizes quadradas; no caso contrário, dizemos que $\mathbf{A}$ é IRREDUTÍVEL.

note que

$$\begin{bmatrix} f_1(t+1) \\ f_2(t+1) \\ \vdots \\ f_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Prove que:

(a) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz não-negativa, irredutível e primitiva.

(b) Se $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$, então $\mathbf{f}(t) = \mathbf{L}^t\mathbf{f}(0)$.

(c) Admitindo que $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{0}$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{f}(t)}{r^t} = \mathbf{p}\Big(\frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{f}(0)}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}}\Big) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\infty} \Big\|\frac{\mathbf{f}(t)}{r^t}\Big\|_1 = \frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{f}(0)}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}}$$

onde $r = \rho(\mathbf{L})$, $\mathbf{p}$ é o vector de Perron de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{q}$ é o vector de Perron de $\mathbf{L}^\mathsf{T}$.

(d) $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{f}(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|_1} = \mathbf{p}$.

12.11. Verifique se a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ é primitiva.

12.12. Seja $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-negativa tal que

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} s_{i,j} \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

[Uma matriz com esta propriedade diz-se uma MATRIZ SUB-ESTOCÁSTICA.] Prove que:

(a) $\rho(\mathbf{S}) \leqslant 1$.

(b) Se $\mathbf{S}$ for irredutível, então $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

12.13. Prove que, se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ for uma matriz não-negativa irredutível, então $\mathbf{A}$ será semelhante a $\rho(\mathbf{A})\mathbf{P}$ para alguma matriz estocástica $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

12.14. Seja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz estocástica irredutível. Prove que $r(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = n - 1$.

12.15. Seja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz estocástica irredutível. Prove que o vector de Perron de $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ é

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} P_i}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

onde, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, P_i é o i-ésimo menor principal de $\mathbf{P}$ com ordem $n-1$.