AULA 4

SUMÁRIO. Matrizes normais e teorema da decomposição espectral.

$\triangleright$ Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma MATRIZ NORMAL se $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Por exemplo, qualquer matriz diagonal em $\mathbb{C}^{n\times n}$ é normal; de facto, se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

for uma matriz diagonal, então

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \overline{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{d_n} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{DD}^* = \mathbf{D}^*\mathbf{D} = \begin{bmatrix} |d_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |d_2|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |d_n|^2 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 4.1 (Decomposição espectral). *Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ será normal se e só se existir uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{U}^*\mathbf{AU}$ é uma matriz diagonal.*

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e suponhamos que existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{D} = \mathbf{U}^*\mathbf{AU}$ é uma matriz diagonal. Como $\mathbf{U}$ é unitária, $\mathbf{U}$ é invertível e $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$, logo $\mathbf{UU}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_n$ e, portanto,

$$\mathbf{UDU}^* = \mathbf{UU}^*\mathbf{AUU}^* = \mathbf{A}.$$

Como $\mathbf{D}$ é diagonal, temos $\mathbf{DD}^* = \mathbf{D}^*\mathbf{D}$, de onde resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}^* &= (\mathbf{UDU}^*)(\mathbf{UDU}^*)^* = \mathbf{UDU}^*\mathbf{UD}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{UDD}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{UD}^*\mathbf{DU}^* \\ &= \mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{AU})^*(\mathbf{U}^*\mathbf{AU})\mathbf{U}^* = \mathbf{UU}^*\mathbf{A}^*\mathbf{UU}^*\mathbf{AUU}^* = \mathbf{AA}^*, \end{aligned}$$

provando que $\mathbf{A}$ é normal.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é normal, isto é que $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Para provar a existência da matriz unitária $\mathbf{U}$, fazemos indução sobre n. O resultado é trivial quando $n = 1$; suponhamos que $n \geqslant 2$. Pelo Teorema 3.3, existe uma matriz unitária $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{V}^*\mathbf{AV}$ é uma matriz triangular superior. Notemos que

$$(\mathbf{VAV}^*)(\mathbf{VAV}^*)^* = \mathbf{V}^*\mathbf{AA}^*\mathbf{V} = \mathbf{V}^*\mathbf{A}^*\mathbf{AV} = (\mathbf{V}^*\mathbf{AV})(\mathbf{V}^*\mathbf{A}^*\mathbf{V})^*$$

e, portanto, $\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V}$ é uma matriz normal. Ponhamos

$$\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$ e $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ (notemos que $\mathbf{A}_0$ é uma matriz triangular superior). Então,

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix};$$

como

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^* & \mathbf{A}_0^* \end{bmatrix},$$

concluímos que

$$\begin{bmatrix} |\lambda|^2 + \mathbf{u}\mathbf{u}^* & \mathbf{u}\mathbf{A}_0^* \\ \mathbf{A}_0\mathbf{u}^* & \mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}\mathbf{u} \\ \lambda\mathbf{u}^* & \mathbf{A}_0^*\mathbf{A}_0 + \mathbf{u}^*\mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, tem de ser $|\lambda|^2 + \mathbf{u}\mathbf{u}^* = |\lambda|^2$, logo $\mathbf{u}\mathbf{u}^* = 0$. Considerando o produto interno em $\mathbb{C}^{1\times n}$, temos

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{u}^*\mathbf{u}) = \mathrm{tr}(\mathbf{u}\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}\mathbf{u}^* = 0^{(*)}$$

e, portanto, tem de ser $\mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Sendo assim,

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^* = \mathbf{A}_0^*\mathbf{A}_0 + \mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{A}_0^*\mathbf{A}_0,$$

provando que $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ é uma matriz normal. Pela hipótese de indução, existe uma matrix unitária $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $\mathbf{U}_0^*\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0$ é uma matriz diagonal. Tal como na demonstração do Teorema 3.3, tomamos a matriz unitária

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

e verificamos que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix}^* \mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^*\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0 \end{bmatrix}$$

(recorde que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$). O resultado segue-se. □

Corolário 4.2. *Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ será normal se e só se existir uma base ortonormada $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ inteiramente constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$.*

(*) Na segunda igualdade, usamos a propriedade $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$ que é válida para quaisquer matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Bbbk^{m\times n}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, suponhamos que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma matriz normal e seja $\mathbf{U}$ uma matriz unitária tal que $\mathbf{D} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ é uma matriz diagonal (a existência da matriz $\mathbf{U}$ é garantida pelo Teorema 4.1). Sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ as colunas de $\mathbf{U}$, de modo que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix};$$

por definição, sabemos que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Além disso, pelo Teorema 2.4, $\mathbf{U}$ é uma matriz invertível e $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$, de modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^*)^{-1}\mathbf{D} = (\mathbf{U}^{-1})^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{D}.$$

Por um lado, temos

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ for a base canónica de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ forem as entradas da diagonal de $\mathbf{D}$, então

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{U}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\lambda_1\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\lambda_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{U}(\lambda_i\mathbf{e}_i) = \lambda_i(\mathbf{U}\mathbf{e}_i) = \lambda_i\mathbf{u}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

concluímos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{u}_n \end{bmatrix},$$

logo

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Como se queria.

Reciprocamente, seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz tal que existe uma base ortonormada $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ inteiramente constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$. Então, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Por definição, a matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

é unitária e tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Tal como acima, temos $\lambda_i\mathbf{u}_i = \mathbf{U}(\lambda_i\mathbf{e}_i)$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, logo

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\lambda_i\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\lambda_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{D}$$

onde $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{e}_n \end{bmatrix}$. O resultado segue-se pelo Teorema 4.1, uma vez que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal e $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D} = \mathbf{D}$. □