AULA 7

SUMÁRIO. Normas vectoriais e normas matriciais.

Como é usual, consideramos $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

$\triangleright$ Uma aplicação $\| \star \| \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ diz-se uma NORMA (VECTORIAL) se satisfizer às seguintes condições, para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{k}$:

(a) $\|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}_0^+$ e $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$;

(b) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$;

(c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (DESIGUALDADE TRIANGULAR).

[A noção de norma pode ser estendida, de maneira óbvia, a qualquer espaço vectorial real ou complexo.]

EXEMPLOS 7.1. (1) A correspondência $\alpha \mapsto |\alpha\|$ define uma norma em $\mathbb{k} = \mathbb{k}^{1\times 1}$.

(2) A aplicação $\| \star \|_2 \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^2} = \Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^2\Bigg)^{1/2}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{k}^{n\times 1},$$

é uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$; notemos que

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

Dizemos que $\| \star \|_2$ é a NORMA EUCLIDEANA em $\mathbb{k}^{n\times 1}$.

(3) A aplicação $\| \star \|_1 \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{k}^{n\times 1},$$

é uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$.

(4) Para qualquer número real $p \geqslant 1$, a aplicação $\| \star \|_p \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{v}\|_p = \Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^p\Bigg)^{1/p}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{k}^{n\times 1},$$

é uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$; a $\| \star \|_p$ chamamos a p-NORMA em $\mathbb{k}^{n\times 1}$.

(5) A aplicação $\|\star\|_\infty\colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{k}^{n\times 1},$$

é uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$; a $\|\star\|_\infty$ chamamos a NORMA DO MÁXIMO em $\mathbb{k}^{n\times 1}$. Notamos que, para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$, a sucessão $\big(\|\mathbf{v}\|_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$ é convergente e que

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{v}\|_p, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

LEMA 7.2. *Qualquer norma $\|\star\|\colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua* (*).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\|\star\|$ uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$ e comecemos por provar que existe uma constante $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|\mathbf{v}\| \leqslant \mu \|\mathbf{v}\|_2, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

Seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de $\mathbb{k}^{n\times 1}$ e seja

$$\mu = n \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\mathbf{e}_i\|;$$

é claro que $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Seja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ arbitrário. Por um lado, como $\mathbf{v} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} v_i \mathbf{e}_i$, temos

$$\|\mathbf{v}\| \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|v_i \mathbf{e}_i\| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|\, \|\mathbf{e}_i\| \leqslant \Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\mathbf{e}_i\|\Big) \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i| = (\mu/n) \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|.$$

Por outro lado, escolhendo $1 \leqslant k \leqslant n$ tal que $|v_k| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|$, deduzimos que

$$\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|\Big)^2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |v_i|\,|v_j| \leqslant n^2 |v_k|^2 \leqslant n^2 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^2 = n^2 \|\mathbf{v}\|_2^2,$$

de onde resulta que $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i| \leqslant n\|\mathbf{v}\|_2$ e, portanto,

$$\|\mathbf{v}\| \leqslant (\mu/n) \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i| \leqslant \mu \|\mathbf{v}\|_2.$$

Como se queria.

(*) Pressupomos que são conhecidos (da Análise Matemática) os conceitos topológicos no espaço $\mathbb{R}^n$ (em particular, os conceitos de convergência e de continuidade) e estes conceitos são traduzidos naturalmente para $\mathbb{R}^{n\times 1}$ (porque $\mathbb{R}^{n\times 1}$ é "essencialmente o mesmo conjunto" que $\mathbb{R}^n$). No caso complexo, identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ (por meio da correspondência $x + iy \mapsto (x, y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$) e $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ (de modo que $\mathbb{C}^{n\times 1}$ é identificado com $\mathbb{R}^{2n\times 1}$); sendo assim, os conceitos topológicos em $\mathbb{C}^n$ reduzem-se aos conceitos conhecidos em $\mathbb{R}^{2n}$. Como exemplo, dizer que uma aplicação $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, definida num subconjuto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{C}^{n\times 1}$, é CONTÍNUA EM $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}$ significa que, para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, para qualquer $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$,

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_2 < \varepsilon \implies |\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{v}_0)| < \delta.$$

Para terminar a demonstração, seja $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ e seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$, temos

$$\big|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{v}_0\|\big| \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|$$

(exercício) de modo que, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ com $\varepsilon \leqslant \delta/\mu$, se tem

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_2 < \varepsilon \implies \big|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{v}_0\|\big| \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| \leqslant \mu\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_2 < \mu\varepsilon \leqslant \delta,$$

provando que $\|\star\|\colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ é, de facto, uma aplicação contínua. □

▷ Dizemos que duas normas $\|\star\|$ e $\|\star\|'$ em $\mathbb{k}^{n\times 1}$ são EQUIVALENTES se existirem constantes $\nu, \mu \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$\nu\|\mathbf{v}\|' \leqslant \|\mathbf{v}\| \leqslant \mu\|\mathbf{v}\|', \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

TEOREMA 7.3. *Qualquer norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$ é equivalente à norma euclideana $\|\star\|_2$; em particular, quaisquer duas normas em $\mathbb{k}^{n\times 1}$ são equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\|\star\|$ uma norma em $\mathbb{k}^{n\times 1}$. Pelo que vimos na demonstração anterior, existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|\mathbf{v}\| \leqslant \mu\|\mathbf{v}\|_2, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1};$$

por conseguinte, falta provar que existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\nu\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \|\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

Para isso, consideramos o subconjunto

$$\mathcal{S} = \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1} \colon \|\mathbf{v}\|_2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

Este subconjunto não-vazio e, além disso, é compacto (porque é fechado e limitado) e, portanto, uma vez que $\|\star\|\colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, existe $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$\|\mathbf{v}_0\| = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{v}\|.^{(*)}$$

Ora, como $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}$, temos $\|\mathbf{v}_0\| = 1$, logo $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ e, portanto, $\nu = \|\mathbf{v}_0\| \in \mathbb{R}^+$. Para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$, pondo $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_2}\mathbf{v}$, temos $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{S}$, logo

$$\nu\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \|\tilde{\mathbf{v}}\|\|\mathbf{v}\|_2 = \big\|\|\mathbf{v}\|_2\tilde{\mathbf{v}}\big\| = \|\mathbf{v}\|,$$

o que termina a demonstração. □

$^{(*)}$Trata-se de uma aplicação de um resultado importante da Análise Matemática (que generaliza o teorema de Weierstrass): para qualquer aplicação contínua $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto compacto e não-vazio $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$, existem pontos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0' \in \mathcal{X}$ tais que

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad \phi(\mathbf{x}_0') = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}).$$

Este resultado irá ser usado algumas vezes neste curso.]

▷ Uma aplicação $\|\star\|\colon \Bbbk^{n\times n}\to\mathbb{R}$, onde $\Bbbk=\mathbb{R}$ ou $\Bbbk=\mathbb{C}$, diz-se uma NORMA MATRICIAL se satisfizer às seguintes condições, para quaisquer $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\Bbbk^{n\times n}$ e qualquer $\alpha\in\Bbbk$:

(a) $\|\mathbf{A}\|\in\mathbb{R}_0^+$ e $\|\mathbf{A}\|=0 \iff \mathbf{A}=\mathbf{0}$;

(b) $\|\alpha\mathbf{A}\|=|\alpha|\|\mathbf{A}\|$;

(c) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$ (DESIGUALDADE TRIANGULAR).

(d) $\|\mathbf{AB}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$.

[As condições (a)-(c) asseguram que $\|\star\|$ é uma norma no espaço vectorial $\Bbbk^{n\times n}$.]

EXEMPLOS 7.4. (1) A aplicação $\|\star\|_2\colon \Bbbk^{n\times n}\to\mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^2},\qquad \mathbf{v}=\big[a_{i,j}\big]\in\Bbbk^{n\times n},$$

é uma norma matricial; a $\|\star\|_2$ é usual chamar-se a NORMA DE FROBENIUS de $\Bbbk^{n\times n}$.

Já sabemos que $\|\star\|_2$ é uma norma vectorial em $\Bbbk^{n\times n}$ (trata-se da norma euclideana). Por outro lado, para quaisquer $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\Bbbk^{n\times n}$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{B}\|_2^2&=\Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^2\Big)\Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^2\Big)=\sum_{1\leqslant i,j,i',j'\leqslant n}|a_{i,j}|^2|b_{i',j'}|^2\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}|a_{i,k}|^2|b_{k,j}|^2\\&=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}|a_{i,k}b_{k,j}|^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{i,k}b_{k,j}|^2\geqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{i,k}b_{k,j}\Big|^2=\|\mathbf{AB}\|_2,\end{aligned}$$

provando que $\|\star\|_2$ é, de facto, uma norma matricial em $\Bbbk^{n\times n}$.

(2) A aplicação $\|\star\|_\infty\colon \Bbbk^{n\times n}\to\mathbb{R}$, definida por

$$\|\mathbf{A}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{i,j}|,\qquad \mathbf{A}=\big[a_{i,j}\big]\in\Bbbk^{n\times n},$$

é uma norma (vectorial), mas não é uma norma matricial. De facto, para

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},$$

temos $\|\mathbf{AB}\|_\infty=2$, enquanto que $\|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{B}\|_\infty=1$.