AULA 8

Sumário. Norma matricial induzida por uma norma vectorial. Norma espectral.

Proposição 8.1. *Seja* $\| \star \| \colon \Bbbk^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ *uma norma (vectorial) em* $\Bbbk^{n\times 1}$. *Então, a aplicação* $\| \star \| \colon \Bbbk^{n\times n} \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{v}\in \Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n},$$

é uma norma matricial (a que nos referimos como a norma matricial induzida *por* $\| \star \|$*). Tem-se*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n},\ \mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1};$$

além disso, tem-se

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$$

onde $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times n} \colon \|\mathbf{v}\| = 1\}$.

Demonstração. Deixamos como exercício provar que, para quaisquer $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ e qualquer $\alpha \in \Bbbk$:

- $\|\mathbf{A}\| \in \mathbb{R}_0^+$ e $\|\mathbf{A}\| = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0}$;
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$.

Por outro lado, se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Bbbk^{n\times n}$ e $\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1}$, então

$$\frac{\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}+\mathbf{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|+\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| = \sup_{\mathbf{v}\in \Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|.$$

Sendo assim, $\| \star \|$ é uma norma (vectorial) em $\Bbbk^{n\times n}$. Para provar que é norma matricial, sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Bbbk^{n\times n}$ e seja $\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1}$. Se $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então

$$\frac{\|(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} = 0 \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|.$$

Se $\mathbf{B}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então

$$\frac{\|(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|}\,\frac{\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|.$$

Em conclusão,

$$\|\mathbf{AB}\| = \sup_{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|(\mathbf{AB})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|.$$

Agora, para qualquer $\mathbf{A}\in\Bbbk^{n\times n}$ e qualquer $\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}$, temos

$$\frac{\|\mathbf{Av}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \sup_{\mathbf{w}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{Aw}\|}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{A}\|,$$

logo $\|\mathbf{Av}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

Para terminar a demonstração, seja $\mathbf{A}\in\Bbbk^{n\times n}$ e provemos que $\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\|$. Em primeiro lugar, para qualquer $\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}$ com $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, temos

$$\frac{\|\mathbf{Av}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \left\|\|\mathbf{v}\|^{-1}(\mathbf{Av})\right\| = \left\|\mathbf{A}(\|\mathbf{v}\|^{-1}\mathbf{v})\right\| \leqslant \sup_{\mathbf{w}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Aw}\|,$$

de onde resulta que

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{Av}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leqslant \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\|.$$

Sendo assim, há que provar que existe $\mathbf{v}_0\in\mathcal{S}$ tal que $\|\mathbf{Av}_0\| = \|\mathbf{A}\|$.

Deixamos como exercício justificar que a correspondência $\mathbf{v}\mapsto\|\mathbf{Av}\|$ define uma aplicação contínua de $\Bbbk^{n\times 1}$ em $\mathbb{R}$ (recorde que $\|\star\|\colon \Bbbk^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ é uma aplicação contínua). Por outro lado, como $\|\star\|$ e $\|\star\|_2$ são normas equivalentes, existe $\mu\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \mu\|\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1};$$

em particular, temos

$$\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \mu\|\mathbf{v}\| = \mu, \qquad \mathbf{v}\in\mathcal{S},$$

o que significa que

$$\mathcal{S} \subseteq \left\{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}\colon \|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \mu\right\}.$$

Sendo assim, $\mathcal{S}$ é um subconjunto limitado de $\Bbbk^{n\times 1}$ e, uma vez que também é fechado (porque é imagem inversa de $\{1\}\subseteq\mathbb{R}$ por meio de uma aplicação contínua), concluímos que $\mathcal{S}$ é um subconjunto compacto de $\Bbbk^{n\times 1}$. Por conseguinte, existe $\mathbf{v}_0\in\mathcal{S}$ tal que

$$\|\mathbf{Av}_0\| = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\| = \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\| = \|\mathbf{A}\|,$$

o que termina a demonstração. □

Corolário 8.2. *Seja* $\|\star\|\colon \Bbbk^{n\times n}\to\mathbb{R}$ *a norma matricial induzida por uma norma (vectorial)* $\|\star\|\colon \Bbbk^{n\times 1}\to\mathbb{R}$. *Se* $\mathbf{A}\in\Bbbk^{n\times n}$ *for uma matriz invertível, então*

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{1}{\min_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{Av}\|}$$

onde $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times n}\colon \|\mathbf{v}\| = 1\}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ uma matriz invertível. Como $\mathcal{S}$ é um subconjunto compacto não-vazio de $\Bbbk^{n\times 1}$, existe $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v}_0\| = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|.$$

Ora, uma vez que a correspondência $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$ define uma permutação de $\Bbbk^{n\times 1}$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}^{-1}\| &= \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\| = \max_{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \max_{\mathbf{v}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})\|}\\ &= \max_{\mathbf{w}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|} = \max_{\mathbf{w}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^{-1}\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|} = \max_{\mathbf{w}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\big\|\|\mathbf{w}\|^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{w})\big\|}\\ &= \max_{\mathbf{w}\in\Bbbk^{n\times 1}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\big\|\mathbf{A}\big(\|\mathbf{w}\|^{-1}\mathbf{w}\big)\big\|} = \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{S}} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\min_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|},\end{aligned}$$

como se queria. □

Exemplo 8.3. Definimos a norma espectral em $\Bbbk^{n\times n}$, que denotaremos por $\|\star\|_s$, como sendo a norma induzida pela norma euclideana $\|\star\|_2 \colon \Bbbk^{n\times 1} \to \mathbb{R}$.

Assim, pondo $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1} \colon \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}$, temos

$$\|\mathbf{A}\|_s = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2, \qquad \mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n};$$

deste modo, se $\lambda(\mathbf{A})_{\max} \in \mathbb{R}^+$ denotar o maior valor próprio da matriz hermítica $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ (de modo que $\sqrt{\lambda(\mathbf{A})_{\max}}$ é o maior valor singular de $\mathbf{A}$), então

$$\|\mathbf{A}\|_s = \sqrt{\lambda(\mathbf{A})_{\max}}$$

(usando o Teorema 6.4).

Por outro lado, denotando por $\lambda(\mathbf{A})_{\min} \in \mathbb{R}^+$ denotar o menor valor próprio de $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, obtemos

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_s = \frac{1}{\min_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}}\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\mathbf{A})_{\min}}}$$

(usando o corolário anterior e o Teorema 6.4).

Proposição 8.4. *Para qualquer matriz* $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$*, tem-se:*

(a) $\|\mathbf{A}\|_s = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}} \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{S}} |\mathbf{w}^*\mathbf{A}\mathbf{v}|$ *onde* $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1} \colon \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}$*;*

(b) $\|\mathbf{A}^*\|_s = \|\mathbf{A}\|_s$*;*

(c) $\|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\|_s = \|\mathbf{A}\|_s^2$*;*

(d) $\|\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}\|_s = \|\mathbf{A}\|_s$ *para quaisquer matrizes unitárias* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \Bbbk^{n\times n}$*.*

Demonstração. Exercício. □