AULA 10

Sumário. Fórmula de Gelfand para o raio espectral. Localização dos valores próprios. Teorema de Geršgorin (primeira parte).

$\triangleright$ Começamos esta aula com a demonstração de uma consequência da Proposição 9.4.

Corolário 10.1 (Fórmula de Gelfand). *Seja* $\|\star\|$ *uma norma matricial em* $\mathbb{C}^{n\times n}$*. Então, a sucessão* $\left(\sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *é convergente e tem-se*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|} = \rho(\mathbf{A}).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário e provemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, se tem

$$k \geqslant k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|} - \rho(\mathbf{A})\right| < \varepsilon$$

(esta é precisamente a condição para que a sucessão $\left(\sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ seja convergente com limite $\rho(\mathbf{A})$). Para isso, consideramos a matriz $\tilde{\mathbf{A}} = (\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^{-1}\mathbf{A}$. É claro que

$$\sigma(\tilde{\mathbf{A}}) = \left\{(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^{-1}\lambda \colon \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\right\},$$

logo

$$\rho(\tilde{\mathbf{A}}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} \left|(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^{-1}\lambda\right| = (\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^{-1} \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |\lambda| = \frac{\rho(\mathbf{A})}{\rho(\mathbf{A})+\varepsilon} < 1$$

e, portanto, pelo teorema anterior, a sucessão $\left(\tilde{\mathbf{A}}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{A}}^k = 0$. Por conseguinte, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$\Bbbk \geqslant k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tilde{\mathbf{A}}^k\| < 1.$$

Como $\tilde{\mathbf{A}}^k = (\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^{-k}\mathbf{A}^k$, concluímos que para qualquer $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant k_0$, se tem

$$\left\|\mathbf{A}^k\right\| = \left\|(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k \tilde{\mathbf{A}}^k\right\| = (\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k \left\|\tilde{\mathbf{A}}^k\right\| < (\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k$$

e, portanto,

$$\sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|} < \sqrt[k]{(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k} = \rho(\mathbf{A})+\varepsilon,$$

ou seja, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos

$$k \geqslant k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sqrt[k]{\|\mathbf{A}^k\|} - \rho(\mathbf{A})\right| < \varepsilon.$$

Como se queria. $\square$

▷ Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos

$$r_i(\mathbf{A}) = \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{i,j}|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

e OS DISCOS DE GERŠGORIN $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}$ por

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{A}) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a_{i,i}| \leqslant r_i(\mathbf{A})\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

TEOREMA 10.2 (Geršgorin). *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e sejam* $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}$ *os discos de Geršgorin de* $\mathbf{A}$. *Então,* $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, seja $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e seja $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que

$$|v_i| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |v_k| = \|\mathbf{v}\|_\infty.$$

É claro que $|v_k| \leqslant |v_i|$ para qualquer $1 \leqslant k \leqslant n$ e que $\mathbf{v}_i \neq 0$ (porque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Temos

$$\lambda v_i = (\mathbf{A}\mathbf{v})_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} v_j$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{i,i}|\,|v_i| &= |(\lambda - a_{i,i})v_i| = \left| \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} a_{i,j} v_j \right| \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{i,j} v_j| = \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{i,j}|\,|v_j| \leqslant \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{i,j}|\,|v_i| = r_i(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

onde $r_i(\mathbf{A}) = \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{i,j}|$. Como $v_i \neq 0$, concluímos que $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant r_i(\mathbf{A})$ e, portanto, $\lambda \in \mathcal{G}_i(\mathbf{A})$. □

▷ Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos

$$\mathcal{G}_r(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A}).$$

Analogamente, para qualquer $1 \leqslant j \leqslant n$, definimos

$$r'_j(\mathbf{A}) = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} |a_{i,j}| \qquad \text{e} \qquad \mathcal{G}'_j(\mathbf{A}) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a_{j,j}| \leqslant r'_i(\mathbf{A})\};$$

além disso, definimos

$$\mathcal{G}_c(\mathbf{A}) = \mathcal{G}'_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}'_n(\mathbf{A}).$$

COROLÁRIO 10.3. *Para qualquer* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tem-se* $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}_c(\mathbf{A})$, *de modo que* $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}_r(\mathbf{A}) \cap \mathcal{G}_c(\mathbf{A})$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se tem

$$\sigma(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \sigma(\mathbf{A}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{G}_c(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

(e aplicar o teorema de Geršgorin). □