AULA 11

Sumário. Continuidade dos valores próprios (I).

$\triangleright$ Os resultados que se seguem preparam a demonstração da "segunda parte" do teorema de Geršgorin (veja o Teorema 12.4).

Lema 11.1. *$\mathcal{U} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \mathbf{U}$ é unitária$\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^{n\times n}$.*

Demonstração. Há que provar que $\mathcal{U}$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}^{n\times n}$(†). Considerando a norma espectral $\| \star \|_s$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$, temos $\|\mathbf{U}\| = 1$ para qualquer matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, de modo que $\mathcal{U} \subseteq \{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \|\mathbf{A}\|_s \leqslant 1\}$. Como $\| \star \|_s$ é equivalente à norma euclideana $\| \star \|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leqslant \alpha \|\mathbf{A}\|_s, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

logo

$$\mathcal{U} \subseteq \big\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \|\mathbf{A}\|_2 \leqslant \alpha\big\}$$

e, portanto, $\mathcal{U}$ é limitado. Por outro lado, se $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \dots$ for uma ssucessão convergente de matrizes em $\mathcal{U}$ e se $\mathbf{U} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{U}_k$, então

$$\mathbf{U}^* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{U}_k^* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{U}_k^{-1} = \mathbf{U}^{-1}$$

(porque $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^*$ e $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^{-1}$ definem funções contínuas de $\mathbb{C}^{n\times n}$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$) e, portanto, $\mathbf{U}$ é uma matriz unitária, isto é, $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$. Sendo assim, $\mathcal{U}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}^{n\times n}$, como se queria. $\square$

Proposição 11.2. *Seja $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \dots$ uma sucessão (infinita) de matrizes unitárias em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Então, existem $s_1, s_2, s_3, \dots \in \mathbb{N}$, $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$, tais que a subsucessão $\mathbf{U}_{s_1}, \mathbf{U}_{s_2}, \mathbf{U}_{s_3}, \dots$ é convergente para uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Demonstração. Trata-se de um resultado conhecido da Análise Matemática: qualquer sucessão num subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, para $m \in \mathbb{N}$, admite uma subsucessão convergente. Assim, basta identificar $\mathbb{C}^{n\times n}$ com $\mathbb{R}^{2n^2}$ e usar o lema anterior. $\square$

Proposição 11.3. *Seja $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots$ uma sucessão convergente em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $\mathbf{A} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k$. Então, existem $s_1, s_2, s_3, \dots \in \mathbb{N}$, $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$, e existem matrizes unitárias $\mathbf{U}_{s_1}, \mathbf{U}_{s_2}, \mathbf{U}_{s_3}, \dots$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ tais que:*

(†)Como é usual, identificamos $\mathbb{C}^{n\times n}$ com $\mathbb{R}^{2n^2}$ de modo natural.

(a) *Para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, *a matriz* $\mathbf{T}_k = \mathbf{U}_{s_k}^* \mathbf{A}_{s_k} \mathbf{U}_{s_k}$ *é triangular superior.*

(b) *A sucessão* $\mathbf{U}_{s_1}, \mathbf{U}_{s_2}, \mathbf{U}_{s_3}, \ldots$ *é convergente e* $\mathbf{U} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{U}_{s_k}$ *é uma matriz unitária.*

(c) *A matriz* $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ *é triangular superior.*

(d) *A sucessão* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \ldots$ *é convergente e* $\mathbf{T} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{T}_k$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, existem da decomposição de Schur, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma matriz unitária $\mathbf{U}_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que a matriz $\mathbf{U}_k^*\mathbf{A}_k\mathbf{U}_k$ é triangular superior. Pela proposição anterior, existem $s_1, s_2, s_3, \ldots \in \mathbb{N}$, $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$, tais que a subsucessão $\mathbf{U}_{s_1}, \mathbf{U}_{s_2}, \mathbf{U}_{s_3}, \ldots$ é convergente; além disso, $\mathbf{U} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{U}_{s_k}$ é uma matriz unitária. Como qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente com o mesmo limite, a sucessão $\mathbf{A}_{s_1}, \mathbf{A}_{s_2}, \mathbf{A}_{s_3}, \ldots$ é convergente e

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_{s_k} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}.$$

Segue-se que a sucessão $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \ldots$ é convergente com

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{T}_k = \Big(\lim_{k\to\infty} \mathbf{U}_{s_k}^*\Big)\Big(\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_{s_k}\Big)\Big(\lim_{k\to\infty} \mathbf{U}_{s_k}\Big) = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U};$$

além disso, como $\mathbf{T}_k$, para $k \in \mathbb{N}$, são triangulares superiores, é claro que $\mathbf{T} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{T}_k$ também é triangular superior. $\square$