AULA 12

Sumário. Continuidade dos valores próprios (II). Teorema de Geršgorin (segunda parte).

Teorema 12.1 (Continuidade dos valores próprios (1^{a} versão)). *Seja $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$ uma sucessão convergente em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $\mathbf{A} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k$. Para qualquer $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotemos por $\lambda_1(\mathbf{B})$, $\lambda_2(\mathbf{B}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{B}) \in \mathbb{C}$ os valores próprios de $\mathbf{B}$ (contando multiplicidades) e seja S_n o conjunto de todas as permutações $\pi\colon \{1, 2, \ldots, b\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Então, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que*

$$\min_{\pi\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_k) - \lambda_i(\mathbf{A})\right| < \varepsilon$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant k_0$.

Demonstração. Supomos que o resultado é falso, isto é, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existem $k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$, tais que

$$\min_{\pi\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_{k_j}) - \lambda_i(\mathbf{A})\right| \geqslant \varepsilon, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Em particular, obtemos

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_{k_j}) - \lambda_i(\mathbf{A})\right| \geqslant \varepsilon, \qquad j \in \mathbb{N},$$

para qualquer $\pi \in S_n$.

Aplicando a proposição anterior à sucessão convergente $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \mathbf{A}_{k_3}, \ldots$, garantimos que existem $s_1, s_2, s_3, \ldots \in \mathbb{N}$, $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$, e existe uma sucessão convergente de matrizes unitárias $\mathbf{U}_{k_{s_1}}, \mathbf{U}_{k_{s_2}}, \mathbf{U}_{k_{s_3}}, \ldots \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tais que a sucessão $\mathbf{T}_1 = \mathbf{U}^*_{k_{s_1}}\mathbf{A}_{k_{s_1}}\mathbf{U}_{k_{s_1}}$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{U}^*_{k_{s_2}}\mathbf{A}_{k_{s_2}}\mathbf{U}_{k_{s_2}}$, $\mathbf{T}_3 = \mathbf{U}^*_{k_{s_3}}\mathbf{A}_{k_{s_3}}\mathbf{U}_{k_{s_3}}$, ... é convergente e tal que, pondo $\mathbf{U} = \lim_{j\to\infty} \mathbf{U}_{k_{s_j}}$ e $\mathbf{T} = \lim_{j\to\infty} \mathbf{T}_j$, a matriz $\mathbf{T}$ é triangular superior e tal que $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$. Ora, para cada $j \in \mathbb{N}$, os valores próprios de $\mathbf{T}_j$ são exactamente os mesmos que valores próprios de $\mathbf{A}_{k_{s_j}}$ (contando multiplicidades) e, de facto, podemos escolher a matriz $\mathbf{U}_{k_{s_j}}$ de modo que

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, temos

$$\mathbf{T} = \lim_{j\to\infty} \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \lim_{j\to\infty} \lambda_1(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lim_{j\to\infty} \lambda_2(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lim_{j\to\infty} \lambda_n(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ são exactamente os mesmos que valores próprios de $\mathbf{A}$ (contando multiplicidades), concluímos que existe uma permutação $\pi \in S_n$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_i(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) = \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Por conseguinte, concluímos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$ e qualquer $j \in \mathbb{N}$, se tem

$$j \geqslant j_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\lambda_i(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) - \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A})\right| < \varepsilon.$$

Em particular,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_{\pi^{-1}(i)}(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) - \lambda_i(\mathbf{A})\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_i(\mathbf{A}_{k_{s_j}}) - \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A})\right| < \varepsilon$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$ com $j \geqslant j_0$, uma contradição. $\square$

$\triangleright$ Para quaisquer matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min_{\pi\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\lambda_{\pi(i)} - \mu_i\right|$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são os valores próprios de $\mathbf{A}$ (contando multiplicidades) e $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ os valores próprios de $\mathbf{B}$ (contando multiplicidades).

Por exemplo, para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

temos

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -1) \qquad \text{e} \qquad (\mu_1, \mu_2) = (2, 3)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \min\big\{ \max\{|\lambda_1 - \mu_1|, |\lambda_2 - \mu_2|\}, \max\{|\lambda_1 - \mu_2|, |\lambda_2 - \mu_1|\}\big\} \\ &= \min\big\{ \max\{2, 4\}, \max\{3, 3\}\big\} = \min\{4, 3\} = 3; \end{aligned}$$

notemos que os elementos de S_2 são $\mathrm{id}_{\{1,2\}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Com esta notação, o Teorema 12.1 reescreve-se como: *Se $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$ for uma sucessão convergente em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e $\mathbf{A} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k$, então $\rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}), \rho(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}), \rho(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}), \ldots$ será uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$ com $\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{A}_k, \mathbf{A}) = 0$.*

$\triangleright$ A correspondência $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \mapsto \rho(\mathbf{A},\mathbf{B})$ define uma aplicação $\rho\colon \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ que provém de uma distância num certo conjunto-cociente $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ de $\mathbb{C}^n$ por uma relação de equivalência $\sim$. De facto, para quaisquer $(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$(a_1,\dots,a_n) \sim (b_1,\dots,b_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } \pi \in S_n \text{ tal que } (a_1,\dots,a_n) = (b_{\pi(1)},\dots,b_{\pi(n)});$$

por outras palavras, as sequências $(a_1,\dots,a_n)$ e $(b_1,\dots,b_n)$ serão *equivalentes* se e só se tiverem as mesmas coordenadas (contando multiplicidades). A relação $\sim$ é, de facto, uma relação de equivalência e, portanto, podemos considerar o conjunto-cociente $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ constituído pelas classes de equivalência; se $\widetilde{\mathbf{a}} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \colon \mathbf{b} \sim \mathbf{a}\}$ for a classe de equivalência que contém a sequência $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$, então $\widetilde{\mathbb{C}^n} = \{\overline{\mathbf{a}}\colon \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n\}$.

Definimos a função $d\colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \times \overline{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{R}$ por

$$d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\big) = \min_{\pi\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \big|a_{\pi(i)} - b_i\big|, \qquad \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n.$$

É um exercício simples verificar que d é uma *distância* no conjunto $\overline{\mathbb{C}^n}$, isto é, que são satisfeitas as condições:

- Para quaisquer $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, $d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\big) \geqslant 0$ e $d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\big) = 0 \iff \widetilde{\mathbf{a}} = \widetilde{\mathbf{b}} \iff \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.
- Para quaisquer $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, $d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\big) = d\big(\widetilde{\mathbf{b}},\widetilde{\mathbf{a}}\big)$.
- Para quaisquer $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, $d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{c}}\big) \leqslant d\big(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\big) + d\big(\widetilde{\mathbf{b}},\widetilde{\mathbf{c}}\big)$.

Por conseguinte, denotando por $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A}) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ a sequência de todos os valores próprios de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (incluindo multiplicidades), temos

$$\rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) = d\big(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A})},\widetilde{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{B})}\big), \qquad \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

[Notemos que ρ não é uma distância em $\mathbb{C}^{n\times n}$: por exemplo, existem matrizes $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tais que $\rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.]

Teorema 12.2 (Continuidade dos valores próprios (2ª versão)). *Seja $\|\star\|$ uma norma matricial em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Então, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, para quaisquer $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,*

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) < \delta.$$

Demonstração. Consideremos a função $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \widetilde{\mathbb{C}^n}$ definida por

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A}) = \widetilde{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A})}, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Há que provar que $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ é uma função contínua com respeito à topologia em $\mathbb{C}^{n\times n}$ definida pela norma $\|\star\|$ e à topologia em $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ definida pela distância d. Ora, pelo Teorema **??**, sabemos que, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e qualquer sucessão convergente $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$, a sucessão $\big(\rho(\mathbf{A}_k,\mathbf{A})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{A}_k,\mathbf{A}) = 0$. Como

$$\rho(\mathbf{A}_k,\mathbf{A}) = d\big(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A}_k)},\widetilde{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A})}\big), \qquad k \in \mathbb{N},$$

concluímos que a função $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ é contínua com respeito à topologia em $\mathbb{C}^{n\times n}$ definida pela norma euclideana $\|\star\|_2$ e à topologia em $\mathbb{C}^n$ definida pela distância d; isto significa que, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tal que, para quaisquer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 < \varepsilon' \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \delta.$$

O resultado segue-se porque $\|\star\|$ e $\|\star\|_2$ são normas equivalentes. $\square$

TEOREMA 12.3 (Geršgorin). *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}$ os discos de Geršgorin de $\mathbf{A}$. Suponhamos que $\{1, 2, \ldots, n\} = I_1 \cup \cdots \cup I_r$ onde $I_1, \ldots, I_r \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ são não-vazios e disjuntos dois-a-dois. Para cada $1 \leqslant s \leqslant r$, seja*

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{A}) = \bigcup_{i \in I_s} \mathcal{G}_i(\mathbf{A})$$

e suponhamos que:

- *Para cada $1 \leqslant s \leqslant r$, o subconjunto $\mathcal{E}_s(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}$ é conexo.*
- *Para quaisquer $1 \leqslant s \neq s' \leqslant r$, a intersecção $\mathcal{E}_s(\mathbf{A}) \cap \mathcal{E}_{s'}(\mathbf{A})$ é vazia.*

[Por outras palavras, $\mathcal{E}_s(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{E}_r(\mathbf{A})$ são as COMPONENTES CONEXAS *de $\mathcal{G}_r(\mathbf{A})$.] Então, contando multiplicidades,*

$$\#\big(\sigma(\mathbf{A}) \cap \mathcal{E}_s(\mathbf{A})\big) = \#(\mathbf{I}_s), \qquad 1 \leqslant s \leqslant r.$$

DEMONSTRAÇÃO. Com vista a absurdo, suponhamos que existe $1 \leqslant s \leqslant r$ tal que

$$\#\big(\sigma(\mathbf{A}) \cap \mathcal{E}_s(\mathbf{A})\big) \neq \#(\mathbf{I}_s);$$

sem perda de generalidade, supomos que $s = 1$. Seja

$$\delta = \inf\{|z - z'| \colon z \in \mathcal{E}_1(\mathbf{A}),\ z' \in \mathcal{E}_2(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{E}_r(\mathbf{A})\}$$

a distância entre os conjuntos $\mathcal{E}_1(\mathbf{A})$ e $\mathcal{E}_2(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{E}_r(\mathbf{A})$; notemos que, como $\mathcal{E}_1(\mathbf{A}) \cap \big(\mathcal{E}_2(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{E}_r(\mathbf{A})\big) = \varnothing$, temos $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Sejam

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$. Para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, consideremos a matriz

$$\mathbf{A}_\xi = \mathbf{D} + \xi\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \xi a_{1,2} & \cdots & \xi a_{1,n} \\ \xi a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \xi a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi a_{n,1} & \xi a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix};$$

notemos que a correspondência $\xi \mapsto \mathbf{A}_\xi$ define uma função contínua do intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$. É claro que $\#\big(\sigma(\mathbf{D}) \cap \mathcal{E}_1(\mathbf{A})\big) = \#(\mathbf{I}_1)$, de modo que o conjunto

$$\big\{\xi \in [0,1] \colon \#\big(\sigma(\mathbf{A}_\xi) \cap \mathcal{E}_1(\mathbf{A})\big) = \#(\mathbf{I}_1)\big\}$$

é não-vazio; notemos que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}$. Seja

$$\zeta = \sup\big\{\xi \in [0,1] \colon \#\big(\sigma(\mathbf{A}_\xi) \cap \mathcal{E}_1(\mathbf{A})\big) = \#(\mathbf{I}_1)\big\}\,.$$

Pelo teorema anterior, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, para qualquer $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|\mathbf{A}_\zeta - \mathbf{B}\| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(\mathbf{A}_\zeta, \mathbf{B}) < \delta.$$

Como $\xi \mapsto \mathbf{A}_\xi$ define uma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$, existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que, para qualquer $\xi \in [0,1]$,

$$|\xi - \zeta| < \varepsilon_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\mathbf{A}_\xi - \mathbf{A}_\zeta\| < \varepsilon.$$

Sendo assim, concluímos que

$$\rho(\mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\zeta) < \delta, \qquad \zeta - \varepsilon_0 < \xi < \zeta + \varepsilon_0.$$

Pela definição de ζ, existe $\zeta - \varepsilon_0 < \xi < \zeta + \varepsilon_0$ tal que

$$\#\big(\sigma(\mathbf{A}_\xi) \cap \mathcal{E}_1(\mathbf{A})\big) \neq \#\big(\sigma(\mathbf{A}_\zeta) \cap \mathcal{E}_1(\mathbf{A})\big).$$

Deste modo, para qualquer $\pi \in S_n$, tem de existir $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que

$$\lambda_i(\mathbf{A}_\xi) \in \mathcal{E}_1(\mathbf{A}) \qquad \text{e} \qquad \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_\zeta) \in \mathcal{E}_2(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{E}_r(\mathbf{A}).$$

Sendo assim, concluímos que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \big|\lambda_i(\mathbf{A}_\xi) - \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_\zeta)\big| \geqslant \delta, \qquad \pi \in S_n,$$

e, portanto,

$$\rho(\mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\zeta) = \min_{\pi\in S_n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \big|\lambda_i(\mathbf{A}_\xi) - \lambda_{\pi(i)}(\mathbf{A}_\zeta)\big| \geqslant \delta,$$

uma contradição.

O resultado segue-se. □

Teorema 12.4 (Geršgorin). *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sejam $\mathcal{G}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathcal{G}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}$ os discos de Geršgorin de $\mathbf{A}$. Então:*

(a) *$\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n(\mathbf{A})$.*

(b) *Se $\{1,2,\ldots,n\} = I \cup J$ em que I e J são subconjuntos disjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ tais que os conjuntos*

$$\mathcal{G}_I(\mathbf{A}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i(\mathbf{A}) \qquad e \qquad \mathcal{G}_J(\mathbf{A}) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{G}_j(\mathbf{A})$$

são disjuntos, então $\mathcal{G}_I(\mathbf{A})$ *contém exactamente* $\#I$ *valores próprios de* $\mathbf{A}$ *(contando multiplicidades).*

Demonstração. Trata-se das duas partes do teorema de Geršgorin. □

Corolário 12.5. *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e sejam* $\mathcal{G}'_1(\mathbf{A}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}), \dots, \mathcal{G}'_n(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \mathcal{G}_n(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ *os discos de Geršgorin da matriz transposta* $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$*. Então:*

(a) $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{G}'_1(\mathbf{A}) \cup \cdots \cup \mathcal{G}'_n(\mathbf{A})$.

(b) *Se* $\{1, 2, \dots, n\} = I \cup J$ *em que* I *e* J *são subconjuntos disjuntos de* $\{1, 2, \dots, n\}$ *tais que os conjuntos*

$$\mathcal{G}'_I(\mathbf{A}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}'_i(\mathbf{A}) \qquad e \qquad \mathcal{G}'_J(\mathbf{A}) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{G}'_j(\mathbf{A})$$

são disjuntos, então $\mathcal{G}_I(\mathbf{A})$ *contém exactamente* $\#I$ *valores próprios de* $\mathbf{A}$ *(contando multiplicidades).*

Demonstração. Exercício. □