AULA 13

Sumário. Funções de matrizes.

$\triangleright$ Qualquer polinómio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ determina uma função $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por meio da correspondência $\alpha \mapsto p(\alpha)$ e, também, uma função matricial $p\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ por meio da correspondência $\mathbf{A} \mapsto p(\mathbf{A})$: se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, então

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_n + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_n\mathbf{A}^n.$$

Mais geralmente, em algumas situações, é possível associar a dada função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (de variável complexa) uma função matricial $f\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$; por exemplo:

- quando $f(z) = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$, deverá ser $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}$, o que faz sentido sempre que $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ é invertível (tal como $f(z)$ só está definida quando $1 - z$ tem inverso em $\mathbb{C}$);
- quando $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ é uma função racional (isto é, quando $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios em $\mathbb{C}[x]$), deverá ser $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})^{-1}$, o que faz sentido quando a matriz $q(\mathbf{A})$ é invertível;
- outras situações são mais complicadas: será possível definir $\operatorname{sen}(\mathbf{A})$, $\cos(\mathbf{A})$, $e^{\mathbf{A}}$, ou $\log(\mathbf{A})$?

A resposta está em considerar, quando tal for possível, o desenvolvimento em série da função $f(z)$. Por exemplo, sabemos da Análise Complexa que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{i\geqslant 0} z^i = 1 + z + z^2 + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1;$$

isto significa que, sempre que $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| < 1$, a série $\sum_{i\geqslant 0} z^i$ é convergente, isto é, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$, a sucessão das somas parciais

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant k} z^i = 1 + z + \cdots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

é convergente com

$$\sum_{i\geqslant 0} z^i = \lim_{k\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant k} z^i = \frac{1}{1-z}\,.$$

Deste modo, dada qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ é invertível, podemos tentar provar que a série (de matrizes) $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{A}^k = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots$ é convergente e que

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{A}^k = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1};$$

tal como nas funções complexas de variável complexa, dizemos que a série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{A}^k$ é convergente quando a sucessão das somas parciais

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}^i = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

é convergente e, neste caso, definimos

$$\sum_{i\geqslant 0} \mathbf{A}^i = \lim_{k\to\infty} \sum_{0\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}^i.$$

Lema 13.1. *Seja $\left(\mathbf{A}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathbb{C}^{n\times n}$ e suponhamos que existe uma norma $\|\star\|$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ tal que a série numérica $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}_k\|$ é convergente. Então, a série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}_k$ é convergente.*

Demonstração. Provamos que $\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, isto é, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$k, k' \geqslant k_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \mathbf{A}_i \Big\|_2 < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Como a série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}_k\|$ é convergente, a sucessão das somas parciais $\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e, portanto, é uma sucessão de Cauchy. Sendo assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$k, k' \geqslant k_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\| - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \|\mathbf{A}_i\| \Big| < \varepsilon.$$

Para quaisquer $k, k' \in \mathbb{N}$ com $k' < k$, temos

$$\Big\| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \mathbf{A}_i \Big\|_2 = \Big\| \sum_{k'+1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i \Big\|_2 \leqslant \sum_{k'+1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\|_2.$$

Como todas as normas (vectoriais) em $\mathbb{C}^{n\times n}$ são equivalentes, existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\mathbf{X}\|_2 \leqslant \|\mathbf{X}\|$ para qualquer $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Por conseguinte, obtemos

$$\Big\| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \mathbf{A}_i \Big\|_2 \leqslant \sum_{k'+1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\|_2 \leqslant \mu \sum_{k'+1\leqslant i\leqslant k} \mu\|\mathbf{A}_i\| = \mu \Big| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\| - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \|\mathbf{A}_i\| \Big|.$$

Agora, como a série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}_k\|$ é convergente, a sucessão das somas parciais $\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e, portanto, é uma sucessão de Cauchy. Sendo assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$k, k' \geqslant k_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \|\mathbf{A}_i\| - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \|\mathbf{A}_i\| \Big| < \varepsilon/\mu$$

e, portanto,

$$k, k' \geqslant k_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\| \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{A}_i - \sum_{1\leqslant i\leqslant k'} \mathbf{A}_i \Big\|_2 < \mu(\varepsilon/\mu) = \varepsilon,$$

como se queria.

Para terminar, basta observar que qualquer sucessão de Cauchy em $\mathbb{C}^{n\times n}$ é convergente. □

TEOREMA 13.2. *Seja $R \in \mathbb{R}_0^+ \cap \{\infty\}$ o raio de convergência*[(*)] *de uma série de potências $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ em que a variável z e os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são números complexos. Então, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a série $\sum_{k\geqslant 0} a_k \mathbf{A}^k$ será convergente sempre que $\rho(\mathbf{A}) < R$; além disso, nesta situação, existe uma norma matricial $\| \star \|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $\|\mathbf{A}\| < R$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\rho(\mathbf{A}) < R$. Pela Proposição 9.2, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{A})+\varepsilon < R$, existe uma norma $\|\star\|$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\|\mathbf{A}\| \leqslant \rho(\mathbf{A})+\varepsilon < R$. Para esta norma, a série $\sum_{k\geqslant 0} a_k\|\mathbf{A}\|^k$ é absolutamente convergente, isto é, $\sum_{k\geqslant 0} |a_k|\|\mathbf{A}\|^k$ é convergente. Por outro lado, para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$0 \leqslant \|a_k\mathbf{A}^k\| = |a_k|\,\|\mathbf{A}^k\| \leqslant |a_k|\,\|\mathbf{A}\|^k$$

(porque $\| \star \|$ é norma matricial), logo a série $\sum_{k\geqslant 0} \|a_k\mathbf{A}^k\|$ é convergente (pelo critério da comparação). Pelo lema anterior, concluímos que a série $\sum_{k\geqslant 0} a_k\mathbf{A}^k$ é convergente. □

EXEMPLOS 13.3. (a) A função exponencial $z \mapsto e^z$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ (isto é, é diferenciável em $\mathbb{C}$) e, por isso, admite uma expansão em série de potências (centrada em 0)

$$e^z = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\, z^k, \qquad z \in \mathbb{C};$$

em particular, a série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\, z^k$ é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ e, portanto, o seu raio de convergência é $R = \infty$. Sendo assim, o Teorema 13.2 garante que, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\, \mathbf{A}^k$ é convergente, o que permite definir a EXPONENCIAL $e^{\mathbf{A}}$ da matriz $\mathbf{A}$ por

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\, \mathbf{A}^k.$$

(b) A função $z \mapsto \log(1+z)$ é holomorfa em $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ e, por isso, admite uma expansão em série de potências (centrada em 0)

$$\log(1+z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\, z^k, \qquad z \in \mathcal{S};$$

[(*)] Isto significa que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ é absolutamente convergente (isto é, a série $\sum_{k\geqslant 0} |a_k z^k| = \sum_{k\geqslant 0} |a_k|\,|z|^k$ é convergente) quando $|z| < R$ e divergente quando $|z| > R$; no caso em que $|z| = R$, a série pode ser convergente ou divergente. O raio de convergência da série $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

(caso este limite exista).

em particular, a série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,z^k$ é convergente para todo $z\in\mathcal{S}$ e, de facto, o seu raio de convergência é $R=1$. Sendo assim, o Teorema 13.2 garante que, para qualquer $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ com $\rho(\mathbf{A})<1$, a série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\mathbf{A}^k$ é convergente; em particular, para qualquer $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ com $\rho(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})<1$, podemos definir o LOGARITMO $\log(\mathbf{A})$ da matriz $\mathbf{A}$ por

$$\log(\mathbf{A})=\log(\mathbf{I}_n+(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n))=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n)^k.$$

(c) A função seno $z\mapsto \operatorname{sen}(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e, por isso, admite uma expansão em série de potências (centrada em 0)

$$\operatorname{sen}(z)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,z^{2k+1},\qquad z\in\mathbb{C};$$

em particular, a série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,z^{2k+1}$ é convergente para todo $z\in\mathbb{C}$. Sendo assim, o Teorema 13.2 garante que, para qualquer $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, a série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\mathbf{A}^{2k+1}$ é convergente, o que permite definir o SENO $\operatorname{sen}(\mathbf{A})$ da matriz $\mathbf{A}$ por

$$\operatorname{sen}(\mathbf{A})=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\mathbf{A}^{2k+1}.$$

(d) A função coseno $z\mapsto\cos(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e, por isso, admite uma expansão em série de potências (centrada em 0)

$$\cos(z)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,z^{2k},\qquad z\in\mathbb{C};$$

em particular, a série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,z^{2k}$ é convergente para todo $z\in\mathbb{C}$. Sendo assim, o Teorema 13.2 garante que, para qualquer $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, a série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\mathbf{A}^{2k}$ é convergente, o que permite definir o COSENO $\cos(\mathbf{A})$ da matriz $\mathbf{A}$ por

$$\cos(\mathbf{A})=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\mathbf{A}^{2k}.$$

COROLÁRIO 13.4. *Seja $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $\|\star\|$ uma norma em $\mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\|\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\|<1$. Então, a matriz $\mathbf{A}$ é invertível e temos*

$$\mathbf{A}^{-1}=\sum_{k\geqslant 0}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^k.$$

DEMONSTRAÇÃO. A série $\sum_{k\geqslant 0}z^k$ tem raio de convergência $R=1$ e, portanto, a série $\sum_{k\geqslant 0}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^k$ é convergente (pelo teorema anterior). Seja

$$\mathbf{B}=\sum_{k\geqslant 0}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^k=\lim_{k\to\infty}\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^i.$$

Temos
$$\mathbf{A}\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^i=(\mathbf{I}_n-(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}))\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^i=\mathbf{I}_n-(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^{k+1}).$$
Como $\|\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\|<1$, a Proposição 9.3 garante que a sucessão $\big((\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{k+1}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ e convergente com $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^{k+1}=0$. Sendo assim, concluímos que
$$\mathbf{AB}=\mathbf{A}\lim_{k\to\infty}\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^i=\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^i=\lim_{k\to\infty}\big(\mathbf{I}_n-(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^{k+1})\big)=\mathbf{I}_n,$$
ou seja, $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\sum_{k\geqslant 0}(\mathbf{I}_n-\mathbf{A})^k$. □

Corolário 13.5. *Seja $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz tal que*
$$|a_{i,i}|>\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}|a_{i,j}|,\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$
Então, $\mathbf{A}$ é invertível.

Demonstração. Seja $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix}$ e notemos que $\mathbf{D}$ é invertível porque $|a_{i,i}|>0$ logo $a_{i,i}\neq 0$ para qualquer $1\leqslant i\leqslant n$. Temos
$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_{1,1}^{-1}a_{1,2} & \cdots & a_{1,1}^{-1}a_{1,n}\\ a_{2,2}^{-1}a_{2,1} & 1 & \cdots & a_{2,2}^{-1}a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,n}^{-1}a_{n,1} & a_{n,n}^{-1}a_{n,2} & \cdots & 1\end{bmatrix}$$
e, portanto,
$$\mathbf{I}_n-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & -a_{1,1}^{-1}a_{1,2} & \cdots & -a_{1,1}^{-1}a_{1,n}\\ -a_{2,2}^{-1}a_{2,1} & 0 & \cdots & -a_{2,2}^{-1}a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n,n}^{-1}a_{n,1} & -a_{n,n}^{-1}a_{n,2} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$
Seja $\|\star\|$ a norma em $\mathbb{C}^{n\times n}$ induzida por $\|\star\|_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$; assim,
$$\|\mathbf{X}\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}|x_{i,j}|,\qquad \mathbf{X}\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$
Temos
$$\|\mathbf{I}_n-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}|a_{i,i}^{-1}a_{i,j}|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{i,i}|^{-1}\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}|a_{i,j}|<1$$
e, portanto, pelo corolário anterior, a matriz $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ é invertível, logo $\mathbf{A}$ também é invertível. □