# AULA 18

Sumário. Matriz companheira de um polinómio. Matrizes não-derrogatórias.

▷ Dado um polinómio mónico arbitrário

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{C}[x],$$

definimos a MATRIZ COMPANHEIRA de $p(x)$ como sendo

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Proposição 18.1. *Se $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for a matriz companheira de um polinómio mónico $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, então $m_{\mathbf{C}}(x) = p_{\mathbf{C}}(x) = p(x)$.*

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e notemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{C}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{C}\mathbf{e}_2 = \mathbf{C}^2\mathbf{e}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{C}\mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{C}^{n-1}\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Além disso, se $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ em que $a_n = 1$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{e}_n &= -a_0\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2 - \cdots - a_{n-2}\mathbf{e}_{n-1} - a_{n-1}\mathbf{e}_n \\ &= -a_0\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{C}\mathbf{e}_1 - \cdots - a_{n-2}\mathbf{C}^{n-2}\mathbf{e}_1 - a_{n-1}\mathbf{C}^{n-1}\mathbf{e}_1 \\ &= \big(-a_0\mathbf{I}_n - a_1\mathbf{C} - \cdots - a_{n-2}\mathbf{C}^{n-2} - a_{n-1}\mathbf{C}^{n-1}\big)\mathbf{e}_1 \\ &= \big(\mathbf{C}^n - p(\mathbf{C})\big)\mathbf{e}_1 = \mathbf{C}^n\mathbf{e}_1 - p(\mathbf{C})\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$p(\mathbf{C})\mathbf{e}_1 = \mathbf{C}^n\mathbf{e}_1 - \mathbf{C}\mathbf{e}_n = \mathbf{C}^n\mathbf{e}_1 - \mathbf{C}(\mathbf{C}^{n-1}\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}.$$

Por outro lado, para qualquer $2 \leqslant i \leqslant n$, temos

$$p(\mathbf{C})e_i = p(\mathbf{C})\mathbf{C}^{i-1}\mathbf{e}_1 = \mathbf{C}^{i-1}p(\mathbf{C})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Por conseguinte, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathcal{N}\big(p(\mathbf{C})\big)$ e, portanto,

$$\mathcal{N}\big(p(\mathbf{C})\big) = \mathbb{C}^{n\times 1},$$

o que obriga a que $p(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$. Pelo Teorema 21.1, existe um polinómio $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$p(x) = m_{\mathbf{C}}(x)q(x);$$

em particular, $\operatorname{gr} m_{\mathbf{C}}(x) \leqslant \operatorname{gr} p(x)$. Pondo $m_{\mathbf{C}}(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_rx^r$, em que $b_r = 1$, e supondo que $r < n$, obtemos

$$\mathbf{0} = m_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})\mathbf{e}_1 = b_0\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{C}\mathbf{e}_1 + \cdots + b_r\mathbf{C}^r\mathbf{e}_1 = b_0\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2 + \cdots + b_r\mathbf{e}_{r+1},$$

de onde resulta que $b_0 = b_1 = \cdots = b_r = 0$ (porque $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r+1}$ são linearmente independentes), uma contradição (porque $b_r = 1$). Sendo assim, tem de ser $r = n$, logo $p(x) = m_{\mathbf{C}}(x)$ (porque $p(x)$ e $m_{\mathbf{C}}(x)$ são mónicos).

Por outro lado, como $m_{\mathbf{C}}(x)$ é um divisor de $p_{\mathbf{C}}(x)$ e $p_{\mathbf{C}}(x)$ é mónico com grau $n = \operatorname{gr} m_{\mathbf{C}}(x)$, concluímos que $p_{\mathbf{C}}(x) = m_{\mathbf{C}}(x) = p(x)$. □

▷ Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma MATRIZ NÃO-DERROGATÓRIA se m.g.$(\lambda) = 1$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$; no caso contrário, dizemos que $\mathbf{A}$ é uma MATRIZ DERROGATÓRIA.

TEOREMA 18.2. *Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) $\operatorname{gr} m_{\mathbf{A}}(x) = n$.

(b) $p_{\mathbf{A}}(x) = m_{\mathbf{A}}(x)$.

(c) $\mathbf{A}$ *é não-derrogatória.*

(d) $\mathbf{A}$ *é semelhante à matriz companheira do polinómio* $p_{\mathbf{A}}(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ arbitrária. Como $m_{\mathbf{A}}(x)$ é um divisor de $p_{\mathbf{A}}(x)$ e $p_{\mathbf{A}}(x)$ é mónico com grau $n$ é claro que (a) $\Rightarrow$ (b).

Por outro lado, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ os valores próprios de $\mathbf{A}$ e suponhamos que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para quaisquer $1 \leqslant i \neq j \leqslant t$. Então,

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_t)^{m_t}$$

onde $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant t$.

Suponhamos que $p_{\mathbf{A}}(x) = m_{\mathbf{A}}(x)$. Então, o Teorema 21.4 garante que, para qualquer $1 \leqslant i \leqslant t$, $\mathbf{J}_{m_i}(\lambda_i)$ é o maior bloco de Jordan de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda_i$. Como $m_1 + \cdots + m_t = n$, concluímos que

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{m_t}(\lambda_t) \end{bmatrix}$$

é a forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ e, portanto, m.g.$(\lambda_i) = 1$ para qualquer $1 \leqslant i \leqslant t$, provando que (b) $\Rightarrow$ (c).

Suponhamos que $\mathbf{A}$ é não-derrogatória. Então,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{m_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{m_t}(\lambda_t) \end{bmatrix}$$

é a forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ (porque m.g.$(\lambda)$ é o número de blocos de Jordan associados a $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$). Por outro lado, seja $\mathbf{C}$ a matriz companheira de $p_{\mathbf{A}}(x)$. Pelo teorema anterior, sabemos que

$$m_{\mathbf{C}}(x) = p_{\mathbf{C}}(x) = p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_t)^{m_t}$$

e, portanto, $\sigma(\mathbf{C}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\} = \sigma(\mathbf{A})$. Tal como no parágrafo anterior, concluímos que $\mathbf{J}$ é a forma canónica de Jordan de $\mathbf{C}$. Deste modo, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ são semelhantes a $\mathbf{J}$, logo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ também são semelhantes, provando que (c) $\Rightarrow$ (d).

Finalmente, se $\mathbf{A}$ for semelhante a $\mathbf{C}$, então $m_{\mathbf{A}}(x) = m_{\mathbf{C}}(x)$ e $p_{\mathbf{A}}(x) = p_{\mathbf{C}}(x)$. Como $m_{\mathbf{C}}(x) = p_{\mathbf{C}}(x)$ (pelo teorema anterior), concluímos que $m_{\mathbf{A}}(x) = p_{\mathbf{A}}(x)$ e, portanto,

$$\operatorname{gr} m_{\mathbf{A}}(x) = \operatorname{gr} p_{\mathbf{A}}(x) = n.$$

Assim, provámos que (d) $\Rightarrow$ (a), o que termina a demonstração. $\square$