AULA 22

SUMÁRIO. Teoria de Perron para matrizes positivas (cont.).

PROPOSIÇÃO 22.1. *Para qualquer matriz positiva* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *$\rho(\mathbf{A})$ é o único valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ que satisfaz $|\lambda| = 1$ e, além disso,* $\text{m.a.}\big(\rho(\mathbf{A})\big) = \text{m.g.}\big(\rho(\mathbf{A})\big)$[(†)].

DEMONSTRAÇÃO. Tal como na demonstração anterior, podemos admitir (sem perda de generalidade) que $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $|\lambda| = \rho(\mathbf{A}) = 1$ e seja $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Na demonstração anterior, provámos que $\mathbf{A}|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}| > \mathbf{0}$, de modo que

$$0 < |u_i| = |\mathbf{u}|_i = \big(\mathbf{A}|\mathbf{u}|\big)_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}|\mathbf{u}|_j = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}|u_j|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Por outro lado, temos

$$|u_i| = |\lambda|\,|u_i| = |\lambda u_i| = |(\lambda\mathbf{u})_i| = |(\mathbf{A}\mathbf{u})_i| = \left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}u_j\right| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}|u_j| = |u_i|$$

e, portanto,

$$\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}u_j\right| = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}|u_j| = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}u_j|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Fixemos $1 \leqslant i \leqslant n$. Um resultado básico garante que, para quaisquer $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tem-se

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$$

se e só se, para qualquer $1 \leqslant j \leqslant n$, existir $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_j = \alpha_j z_1$. Em particular, como $\mathbf{u}| > \mathbf{0}$, temos $|u_i| = |\mathbf{u}|_i > 0$ e, portanto, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$a_{i,j}u_j = \alpha_j(a_{i,1}u_1), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Sendo assim, pondo $\beta_j = \frac{\alpha_j a_{i,1}}{a_{i,j}}$, concluímos que

$$u_j = \beta_j u_1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

logo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}$ onde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}^{\mathtt{T}};$$

notemos que $\beta_1 = 1$ e que $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ para qualquer $2 \leqslant j \leqslant n$, logo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Além disso, como $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, temos $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e, uma vez que $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}\mathbf{v} > \mathbf{0}$, concluímos que

$$\mathbf{v} = |\lambda|\mathbf{v} = |\lambda\mathbf{v}| = |\mathbf{A}\mathbf{v}| = \mathbf{A}\mathbf{v},$$

[(†)] Um valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $\text{m.a.}(\lambda) = \text{m.g.}(\lambda)$ diz-se SEMISIMPLES.

de modo que $\lambda = 1$.

Provámos, assim, que $1 = \rho(\mathbf{A})$ é o único valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $|\lambda| = 1$. Provemos agora que m.a.(1) = m.g.(1). Para isso, recordemos que m.g.(1) é o número de blocos de Jordan associados a 1 em qualquer forma canónica de Jordan $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de $\mathbf{A}$. Seja $\mathbf{J}_r(1)$ um destes blocos de Jordan e suponhamos que $r > 1$. Ora, é fácil verificar que

$$\mathbf{J}_r(1)^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \star & \cdots & \star \\ 0 & 1 & k & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\|\mathbf{J}_r(1)^k\|'_\infty \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

onde $\| \star \|'_\infty$ denota a norma matricial $\mathbb{C}^{n\times n}$ induzida pela norma $\| \star \|_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Sendo assim, temos

$$\|\mathbf{J}\|'_\infty \geqslant \|\mathbf{J}_r(1)^k\|'_\infty \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{J}^k\|'_\infty \geqslant \lim_{k\to\infty} k = \infty.$$

Por conseguinte, se $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for uma matriz invertível tal que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, então

$$\|\mathbf{J}^k\|'_\infty = \|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}\|'_\infty \leqslant \|\mathbf{P}^{-1}\|'_\infty \|\mathbf{A}^k\|'_\infty \|\mathbf{P}\|'_\infty,$$

logo

$$\|\mathbf{A}^k\|'_\infty \geqslant \frac{\|\mathbf{J}^k\|'_\infty}{\|\mathbf{P}^{-1}\|'_\infty \|\mathbf{P}\|'_\infty}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|'_\infty \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{J}^k\|'_\infty}{\|\mathbf{P}^{-1}\|'_\infty \|\mathbf{P}\|'_\infty} = \frac{1}{\|\mathbf{P}^{-1}\|'_\infty \|\mathbf{P}\|'_\infty} \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{J}^k\|'_\infty = \infty.$$

Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, ponhamos $\mathbf{A}^k\|'_\infty = \left[a_{i,j}^{(k)}\right]$ e seja $1 \leqslant i_k \leqslant n$ tal que

$$\|\mathbf{A}^k\|'_\infty = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i_k,j}^{(k)}.$$

Como $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, temos $\mathbf{A}^k\mathbf{v} = \mathbf{v}$ e, portanto,

$$\|\mathbf{v}\|_\infty \geqslant v_{i_k} = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i_k,j}^{(k)} v_j \geqslant \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i_k,j}^{(k)} \right) \big(\min_{1\leqslant j\leqslant n} v_j \big) = \|\mathbf{A}^k\|'_\infty \big(\min_{1\leqslant j\leqslant n} v_j \big),$$

de onde resulta que $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|'_\infty \leqslant \|\mathbf{v}\|_\infty$. Esta contradição prova que $r = 1$ e, portanto, o número de blocos de Jordan associados a 1 é igual à multiplicidade m.a.(1) de 1 como valor próprio de $\mathbf{A}$. Por outras palavras, temos m.g.(1) = m.a.(1), como se queria. $\square$

Proposição 22.2. *Para qualquer matriz positiva* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, m.a.$\big(\rho(\mathbf{A})\big) = 1^{(*)}$.

Demonstração. Tal como nas demonstrações anteriores, podemos admitir que $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Suponhamos que m.a.$(1) = m > 1$. Pela proposição anterior, temos m.g.$(1) =$ m.a.(1) e, portanto, existem pelo menos dois vectores linearmente independentes $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tais que

$$\mathbf{Au} = \mathbf{u} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Av} = \mathbf{v}.$$

Seja $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $v_i \neq 0$ e seja

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - (\mathbf{u}_i/\mathbf{v}_i)\mathbf{v}.$$

É claro que $\mathbf{Aw} = \mathbf{w}$ e que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (caso contrário, $\mathbf{u} = ((\mathbf{u}_i/\mathbf{v}_i)\mathbf{v}$, o que não pode acontecer), logo

$$\mathbf{A}|\mathbf{w}| = |\mathbf{w}| \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{w}| > \mathbf{0}$$

(pela demonstração da Proposição 21.4). Em particular, temos $|w_i| = |\mathbf{w}|_i > 0$, o que está em contradição com $w_i = u_i - (u_i/v_i)v_i = 0$. Segue-se que m.a.$(1) = 1$, como se queria. □

▷ Das proposições anteriores resulta que, para qualquer matriz positiva $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, existe um e um só vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que:

- $\mathbf{p} > \mathbf{0}$;
- $\mathbf{Ap} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p}$;
- $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ (isto é, $p_1 + \cdots + p_n = 1$).

A este vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ chamamos o vector de Perron da matriz $\mathbf{A}$.

Dado que, para qualquer matriz positiva $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a transposta $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ também é uma matriz positiva, podemos considerar o vector de Perron $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$; assim, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ é univocamente determinado pelas propriedades:

- $\mathbf{q} > \mathbf{0}$;
- $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{q}^{\mathsf{T}}$ (porque $\rho(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \rho(\mathbf{A})$);
- $\|\mathbf{q}\|_1 = 1$ (isto é, $q_1 + \cdots + q_n = 1$).

Por este motivo, é usual dizermos que $\mathbf{q}$ é o vector de Perron à esquerda da matriz $\mathbf{A}$ (e que $\mathbf{p}$ é o vector de Perron à direita de $\mathbf{A}$).

Proposição 22.3. *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *uma matriz positiva, seja* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e seja* $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. *Então,* $\lambda = 1$ *e existe* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{p}$ *onde* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *é o vector de Perron de* $\mathbf{A}$.

(*) Um valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que m.a.$(\lambda) = 1$ diz-se simples; nesta situação, tem-se m.g.$(\lambda) =$ m.a.(λ) (logo, qualquer valor próprio simples é semisimples).

Demonstração. Seja $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ o vector de Perron de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Como $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, temos $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = q_1v_1 + \cdots + q_nv_n > 0$. Como

$$\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{q})^{\mathsf{T}} = \big(\rho(\mathbf{A})\mathbf{q}\big)^{\mathsf{T}} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{q}^{\mathsf{T}},$$

concluímos que

$$\rho(\mathbf{A})\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{q}^{\mathsf{T}}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})$$

e, portanto, $\lambda = \rho(\mathbf{A})$ (porque $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \neq 0$). Segue-se que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v}$, logo $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{p}$ (porque $\mathrm{m.g.}\big(\rho(\mathbf{A})\big) = \mathrm{m.a.}\big(\rho(\mathbf{A})\big) = 1$ e $\mathbf{A}\mathbf{p} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p}$). Como $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, tem de ser $\alpha > 0$, como se queria. $\square$