AULA 23

SUMÁRIO. Fórmula de Collatz-Wielandt para matrizes positivas. Teorema de Perron-Frobenius.

PROPOSIÇÃO 23.1 (Fórmula de Collatz-Wielandt). *Para qualquer matriz positiva* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, tem-se*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{N}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i}$$

onde $\mathcal{N} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \colon \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, seja $\mathbf{v} \in \mathcal{N}$ e seja

$$\xi = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i}\,;$$

recordemos que $\mathbf{Av} > \mathbf{0}$ para qualquer $\mathbf{v} \in \mathcal{N}$ (porque $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Para qualquer $1 \leqslant j \leqslant n$, temos $0 \leqslant (\xi\mathbf{v})_j \leqslant \xi v_j \leqslant (\mathbf{Av})_j$ e, portanto,

$$\mathbf{0} \leqslant \xi\mathbf{v} \leqslant \mathbf{Av}.$$

Sejam $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ os vectores de Perron de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, respectivamente. Como $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^+$, concluímos que

$$\xi\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{q}^{\mathsf{T}}(\xi\mathbf{v}) \leqslant \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Av} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$$

e, portanto,

$$\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i} = \xi \leqslant \rho(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{v} \in \mathcal{N}.$$

Sendo assim,

$$\max_{\mathbf{v}\in\mathcal{N}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i} \leqslant \rho(\mathbf{A})$$

e o resultado segue-se porque $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$, $\mathbf{Ap} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p}$ e

$$\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ p_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Ap})_i}{p_i} = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\rho(\mathbf{A})p_i}{p_i} = \rho(\mathbf{A}).$$

□

TEOREMA 23.2 (Perron). *As propriedades seguintes são verdadeiras para qualquer matriz positiva* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*:*

(a) *O raio espectral* $\rho(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}_0^+$ *é estritamente positivo; além disso,* $\rho(\mathbf{A})$ *é um valor próprio de* $\mathbf{A}$ *com* m.a.$\big(\rho(\mathbf{A})\big) = 1$ *e* $\rho(\mathbf{A})$ *é o único valor próprio* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ *tal que* $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$*.*

(b) *Existe um e um só vector* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *tal que*

$$\mathbf{p} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{Ap} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p} \qquad e \qquad \|\mathbf{p}\|_1 = 1$$

e, além disso, qualquer vector próprio $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *de* $\mathbf{A}$ *com* $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ *é um múltiplo escalar positivo de* $\mathbf{p}$.

(c) *Se* $\mathcal{N} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \colon \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}$, *então*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{N}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i}.$$

$\triangleright$ Muitos dos resultados anteriores são verdadeiros para matrizes não-negativas $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. No entanto, embora o raio espectral $\rho(\mathbf{A})$ seja real não-negativo, podemos ter $\rho(\mathbf{A}) = 0$ para algumas matrizes não-negativas $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$; por exemplo, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Proposição 23.3. *Para qualquer matriz não-negativa* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) $\rho(\mathbf{A})$ *é um valor próprio de* $\mathbf{A}$.

(b) *Existe um vector* $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *tal que* $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{Av} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v}$.

(c) *Vale a fórmula de Collatz-Wielandt:*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{N}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Av})_i}{v_i}$$

onde $\mathcal{N} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \colon \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$, seja

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

e, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. É claro que $\mathbf{A}_k > \mathbf{0}$, de modo que o teorema de Perron é verdadeiro para estas matrizes; em particular, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o raio espectral $\rho_k = \rho(\mathbf{A}_k) \in \sigma(\mathbf{A}_k)$ é número real positivo e existe um e um só vector $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que

$$\mathbf{p}_k > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}_k\mathbf{p}_k = \rho_k\mathbf{p}_k \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{p}_k\|_1 = 1$$

(isto é, $\mathbf{p}_k$ é o vector de Perron de $\mathbf{A}_k$). Como $\mathbf{p}_k \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \colon \|\mathbf{v}\|_1 = 1\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{\mathbf{p}_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ é limitado e, portanto, existe uma subsucessão convergente $\left(\mathbf{p}_{k_s}\right)_{s\in\mathbb{N}}$

de $\big(\mathbf{p}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ (pelo teorema de Bolzano-Weierstrass). Seja $\mathbf{v} = \lim_{s\to\infty} \mathbf{p}_{k_s}$. Como $\mathbf{p}_{k_s} > \mathbf{0}$ e $\|\mathbf{p}_{k_s}\|_1 = 1$ para qualquer $s \in \mathbb{N}$, é fácil justificar que $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; de facto,

$$v_i = \lim_{s\to\infty} (\mathbf{p}_{k_s})_i \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

(porque $(\mathbf{p}_{k_s})_i > 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$) e

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \lim_{s\to\infty} \|\mathbf{p}_{k_s}\|_1 = 1$$

(porque $\| \star \|_1$ é uma função contínua de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ em $\mathbb{R}$).

Sejam $k, k' \in \mathbb{N}$, $k > k'$, e ponhamos $\mathbf{B} = \mathbf{A}_k$ e $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{k'}$. Como $\mathbf{B}-\mathbf{C} = \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{k'} = \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\big)\mathbf{E} > \mathbf{0}$, temos $\mathbf{B} > \mathbf{C}$ e, portanto, $\mathbf{B}^r > \mathbf{C}^r$ para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Sendo assim, considerando a norma matricial $\| \star \|'_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ induzida pela norma vectorial $\| \star \|_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$, temos $\|\mathbf{B}^r\|_\infty > \|\mathbf{C}^r\|_\infty$ e, portanto,

$$\sqrt[r]{\|\mathbf{B}^r\|_\infty} > \sqrt[r]{\|\mathbf{C}^r\|_\infty}, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

Usando o Corolário 10.1, concluímos que

$$\rho(\mathbf{B}) = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\|\mathbf{B}^r\|} > \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\|\mathbf{C}^r\|} = \rho(\mathbf{C}).$$

Por conseguinte, obtemos uma sucessão decrescente

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \cdots ;$$

além disso, como $\mathbf{A}_k - \mathbf{A} = \frac{1}{k}\,\mathbf{E} > \mathbf{0}$, temos também

$$\rho_k > \rho(\mathbf{A}) > 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Segue-se que a sucessão $\big(\rho_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com limite

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho^* \geqslant \rho(\mathbf{A}).$$

Por outro lado, é claro que a sucessão $\big(\mathbf{A}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$, de modo que as sucessões $\big(\mathbf{A}_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big)_{s\in\mathbb{N}}$ e $\big(\rho_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big)_{s\in\mathbb{N}}$ também são convergentes com limites

$$\lim_{s\to\infty} \big(\mathbf{A}_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big) = \big(\lim_{s\to\infty} \mathbf{A}_{k_s}\big)\big(\lim_{s\to\infty} \mathbf{p}_{k_s}\big) = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \big(\rho_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big) = \big(\lim_{s\to\infty} \rho_{k_s}\big)\big(\lim_{s\to\infty} \mathbf{p}_{k_s}\big) = \rho^*\mathbf{v}.$$

Como $\mathbf{A}_k\mathbf{p}_k = \rho_k\mathbf{p}_k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lim_{s\to\infty} \big(\mathbf{A}_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big) = \lim_{s\to\infty} \big(\rho_{k_s}\mathbf{p}_{k_s}\big) = \rho^*\mathbf{v}$$

e, portanto, $\rho^* \in \sigma(\mathbf{A})$ (porque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Como $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |\lambda|$ e $\rho^* > 0$, tem de ser $r^* \leqslant \rho(\mathbf{A})$ e, portanto, $\rho^* = \rho(\mathbf{A})$.

Provámos, assim, que $\rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$ e que existe $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que

$$\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{v} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{v}\|_1 = 1,$$

de modo que (a) e (b) são verdadeiras. Para provar (c), consideremos, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o vector de Perron $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ da matriz transposta $\mathbf{A}_k^{\mathsf{T}}$. Temos

$$\mathbf{q}_k\mathbf{w} > \mathbf{0}, \qquad k \in \mathbb{N},\ \mathbf{w} \in \mathcal{N}.$$

Para qualquer $\mathbf{w} \in \mathcal{N}$, seja

$$f(\mathbf{w}) = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ w_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}.$$

Como $\mathbf{A} < \mathbf{A}_k$, temos

$$\mathbf{0} \leqslant f(\mathbf{w})\mathbf{w} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{w} < \mathbf{A}_k\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} \in \mathcal{N},\ k \in \mathbb{N},$$

e, portanto,

$$f(\mathbf{w})\mathbf{q}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \leqslant \mathbf{q}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k\mathbf{w} = \rho_k\mathbf{q}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{w},$$

de onde resulta que

$$f(\mathbf{w}) < \rho_k, \qquad \mathbf{w} \in \mathcal{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte, concluímos que

$$f(\mathbf{w}) \leqslant \lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho^* = \rho(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{w} \in \mathcal{N}.$$

Como $f(\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{A})$ onde $\mathbf{v} \in \mathcal{N}$ é como acima, concluímos que

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{N}} f(\mathbf{w}),$$

como se queria. $\square$