UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 4
Navier-Stokes

1. Considere um plano com inclinação α com a horizontal, onde temos uma camada de fluido de espessura d. O fluido, de viscosidade η, tem uma superfície livre e está sujeito a um campo gravitacional g.

   a) Calcule a velocidade em função da distância da placa e a taxa de escoamento para uma espessura constante e uniforme d.

   b) Discuta as aproximações necessárias para que se possa considerar o escoamento na vertical estacionário.

2. Considere um escoamento viscoso na vertical, num tubo de seção transversal circular com $r = a$, sob a ação da gravidade.

   a) Calcule o campo de velocidades.

   b) Calcule a taxa de escoamento no tubo.

   c) Calcule o raio necessário para o escoamento deixar de ser laminar, supondo que a viscosidade cinemática é $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

3. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, na região anular entre dois cilindros concêntricos. Considere a espessura do canal de escoamento δ, o raio do cilindro interior a, a densidade do fluido ρ, a viscosidade do fluido η, e a aceleração da gravidade g.

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. Mostre que a equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido $dV = 2\pi r\, dr\, dx$.

   b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.

   c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.

   d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de g, e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.

   e) Calcule o gradiente de pressão necessário para que a água escoe num canal com $\delta = 10cm$ (viscosidade $1mPa.s$) com velocidade média igual a $1m/s$, na presença e na ausência da gravidade. Suponha $a = 100cm$.

4. Considere um catéter de raio εR colocado concentricamente num vaso sanguíneo de raio R. Determine a redução na taxa de escoamento do sangue. Suponha o escoamento estacionário e a mesma queda de pressão com e sem catéter. Trate o sangue como um fluído Newtoniano.

5. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, num canal de placas paralelas. Considere a espessura do canal de escoamento δ, a densidade do fluido ρ, a viscosidade do fluido η, e a aceleração da gravidade g.

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes e a partir daí, ou de outra forma, deduza a equação para o balanço das forças no canal.

b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.

c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.

d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de g, e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.

6. Considere um catéter de raio R_c numa artéria de raio R. O catéter move-se com velocidade constante V. O sangue escoa através da região anular entre R_c e R, sob um gradiente de pressão $\Delta p/L$, a qual varia apenas na direcção do escoamento. Pretende-se determinar o efeito do catéter na tensão de corte em $r = R$. Suponha que o escoamento é estacionário e que o fluido é newtoniano.

   a)Escreva as condições para o balanço das forças a partir da equação de Navier-Stokes e as condições de fronteira.

   b)Desenhe o perfil de velocidades e dê uma justificação para a sua forma.

   c)Resolva as equações de balanço. Substitua a lei de Newton da viscosidade e resolva as equações resultantes. Aplique as condições de fronteira para determinar o perfil de velocidades.

   d)Calcule a tensão de corte.

   e)Use os dados $R = 0.17$ cm, $R_c = 0.15$ cm, $V = 10$cm/s, $\mu = 0.03$ g/cm.s, $\Delta p/L = 100$ dyn/cm^3, para calcular a tensão de corte na superfície da artéria.

7. Um tipo de viscómetro envolve a rotação de um cilindro de raio R e comprimento L com velocidade ω constante, num volume de líquido. O cilindro é comprido, $L \gg R$. Longe da superfície do cilindro o fluido está em repouso e a pressão é constante (fluido infinito).

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. A equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido? Explique.

   b)Desenhe o perfil de velocidades para um fluido Newtoniano.

   c)Determine o perfil de velocidades $v_\theta(r)$. Explicite as condições de fronteira.

   d)Calcule o torque exercido no cilindro pelo fluido.

   e)Descreva como este aparelho pode ser usado para determinar a viscosidade de um fluido Newtoniano.

8. Um fluido de Bingham flui por acção da gravidade, entre duas placas paralelas (infinitas) separadas por uma distância $2b$. Suponha que o escoamento é laminar e estacionário. Considere um fluido com densidade ρ, viscosidade η, e tensão de cedência τ_0, num campo gravítico com aceleração g. O módulo da tensão aumenta linearmente com o módulo da taxa de deformação, i.e. a equação constitutiva é $|\tau| = \tau_0 + \eta|\frac{du}{dy}|$. Note que para tensões inferiores à tensão de cedência, o fluido comporta-se como um corpo rígido e flui com velocidade constante.

   a) Escreva a equação para o balanço das forças na região onde o escoamento é não newtoniano.

   b) Calcule a distância a, medida a partir do centro do canal, que delimita a zona de escoamento com velocidade constante.

   c) Escreva a equação para o balanço de forças na região $a \leq y \leq b$.

   d) Mostre que a mesma equação de balanço se pode obter a partir da equação de Navier-Stokes.

   e) Obtenha o perfil de velocidades, usando a condição de fronteira para a velocidade em $y = b$, e a de continuidade para a tensão de corte em $y = a$.

f) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento $0 \leq y \leq b$, e determine a região onde a tensão é máxima.

9. a) Calcule a velocidade $u(y)$ num escoamento viscoso, entre duas placas paralelas estacionárias em $y = 0$ e $y = L$, onde o fluido, de viscosidade cinemática $\nu = \eta/\rho$, escoa na direção x devido a uma força (e.g., gravidade) $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{x}}$. b) Compare a solução analítica com a obtida numericamente usando o código fornecido (code3-Poiseuille.py) para os mesmos parâmetros.

10. Considere um conjunto de vórtices de Taylor-Green em 2D cujos campos de velocidades e pressão são dados inicialmente por:

$$u(x, y, t = 0) = -\cos(kx)\sin(ky)$$
$$v(x, y, t = 0) = \sin(kx)\cos(ky)$$

a) Use a equação de Navier-Stokes para mostrar que a evolução temporal dos campos é

$$u(x, y, t) = -\cos(kx)\sin(ky)e^{-2\nu k^2 t}$$
$$v(x, y, t) = \sin(kx)\cos(ky)e^{-2\nu k^2 t}$$

As variações de pressão podem ser ignoradas e as forças inerciais são desprezáveis comparadas com as forças viscosas.

b) Calcule a energia cinética média por unidade de área. Como podemos usar esta quantidade para medir a viscosidade de um fluido?

c) Introduza estas condições iniciais num dos códigos fornecidos e verifique que a viscosidade medida através da energia cinética média corresponde à viscosdade do fluido.

11. a) Verifique que no caso de um escoamento $\mathbf{u} = [u(y),\, 0,\, 0]$, a tensão se reduz a

$$\mathbf{t} = \left[\eta\frac{du}{dy},\, -p,\, 0\right]$$

no plano $\mathbf{n} = (0,\, 1,\, 0)$. b) Mostre que os termos $\eta(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j)$ do tensor das tensões são nulos para um escoamento uniformemente circular $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}$, onde $\mathbf{\Omega}$ é um vetor constate.

12. a) Usando $t_i = T_{ij}n_j$ e $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, obtemos $t_i = -pn_i + \eta n_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, onde t_i é a componente i da tensão no elemento de superfície com normal n_i. Mostre que

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \eta[2(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})].$$

b) Use o resultado da alínea "a" e as identidades matemáticas necessárias para mostrar que a força resultante exercida num volume de fluido, pelo fluido circundante é

$$\int_S \mathbf{t}dS = \int_V (-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u})dV,$$

onde S é a superfície do volume de fluido. Deduza que se o volume for pequeno, a força resultante, excluindo a gravidade é $-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u}$ por unidade de volume, de acordo com a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

13. Mostre que a dissipação viscosa num fluido Newtoniano em escoamento se escreve (ver Sec. 6.5 do Faber):

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Os códigos necessários para resolver os exercícios estão disponíveis em: `https://github.com/rcvcoelho/lbm-python.git`.