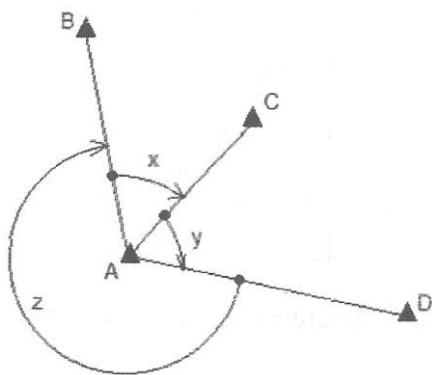
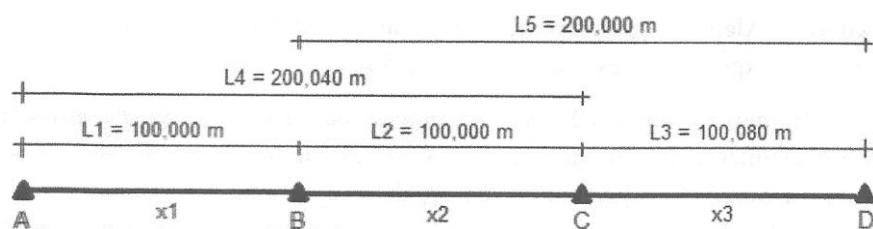


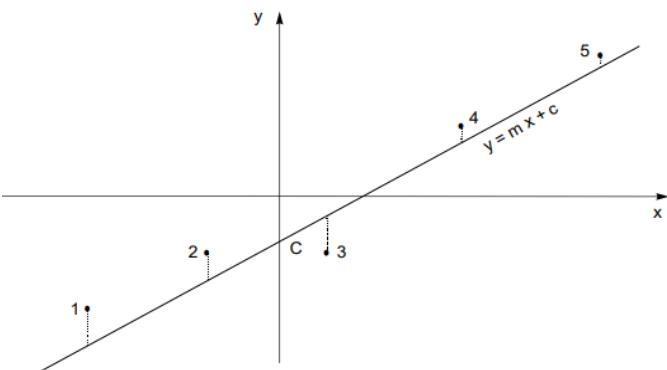
Exercícios:

1. Sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 três medições não correlacionadas e de igual precisão de uma distância. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados do valor mais provável da distância.
2. Os 3 ângulos internos de um triângulo plano são $\ell_1 = 45^\circ 25' 01''$, $\ell_2 = 65^\circ 20' 00''$, $\ell_3 = 69^\circ 15' 02''$. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados dos 3 ângulos supondo que as observações são não correlacionadas e de igual precisão.
3. Os três ângulos horizontais medidos, conforme a figura são $x=42^\circ 17'$, $y=60^\circ 48'$, $z=256^\circ 52'$. Ajuste estes ângulos de maneira a que a respectiva soma seja igual a 360° .



- 4 Numa base foram medidos os segmentos AB, BC, CD, AC e BD; as medidas são não correlacionadas e de igual precisão, estando os valores medidos indicados na figura. Ajustar as observações e determinar a distância AD.





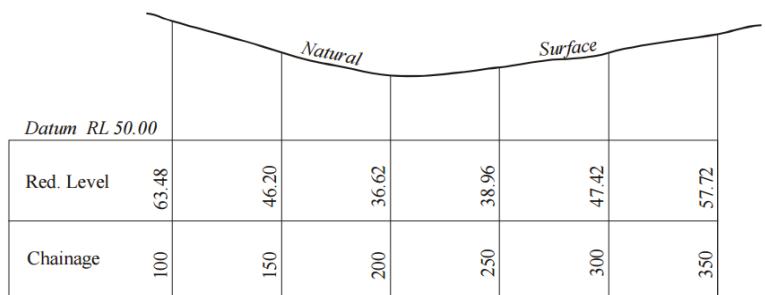
ponto	x (mm)	y (mm)
1	-40.0	-24.0
2	-15.0	-12.0
3	10.0	-12.0
4	38.0	15.0
5	67.0	30.0

5. A figura mostra a posição dos 5 pontos, cujas coordenadas, de igual precisão, estão indicadas na tabela. Ajuste uma recta a esses pontos, supondo que os resíduos estão associados apenas aos valores de y , o que leva a equações de observação da forma $y_k + v_k = mx_k + b$. Adoptando este tipo de equações de observação assume-se que há inconsistências entre o modelo e as observações e que estas inconsistências em x e em y estão agrupadas nos resíduos, somados ao 1º membro do modelo matemático. As equações podiam ter a forma $y_k + v_{ky} = m(x_k + v_{kx}) + b$, onde v_{ky} e v_{kx} são resíduos associados às coordenadas x e y do ponto k mas estas equações requerem um tipo mais complexo de ajustamento por mínimos quadrados.

6. Ajuste uma circunferência aos pontos da tabela.

I	x_i	y_i
0	0.000	0.000
1	0.500	0.250
2	1.000	1.000
3	1.500	2.250
4	2.000	4.000
5	2.500	6.250
6	3.000	9.000

7. Pretende-se ajustar uma curva parabólica vertical aos 6 pontos do terreno indicados na figura através da respectiva quilometragem e altitude. Obtenha os parâmetros dessa parábola, da forma $y_k + v_k = ax_k^2 + bx_k + c$.

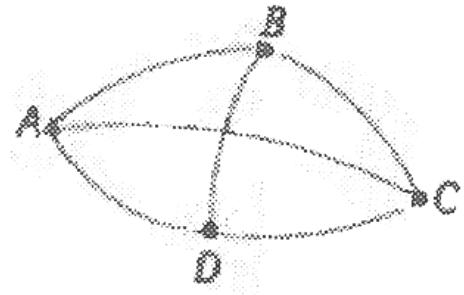


ponto	X	Y
7	54.58	17.11
8	45.47	36.56
9	28.40	53.22
10	2.02	63.72
11	28.12	63.44
12	57.49	52.55
13	80.85	34.20
14	98.08	9.14
15	105.69	17.30
16	103.83	46.96
17	88.42	71.50
18	61.26	86.84
19	26.47	91.07
20	6.59	81.37

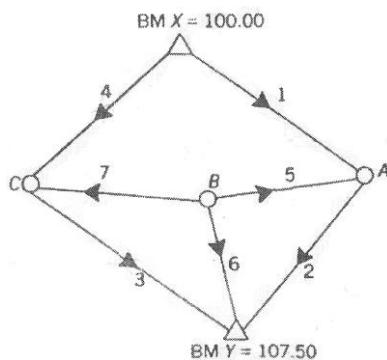
8. Ajuste uma elipse aos pontos da tabela sabendo que a equação cartesiana de uma elipse é $aX^2+2hXY+bY^2+dX+eY=1$, a partir da qual é possível obter a equação de observação $v_k+aX_k^2+2hX_kY_k+bY_k^2+dX_k+eY_k=1$.

9. A observação da rede de nivelamento indicada na figura forneceu os seguintes resultados. Sendo a altitude do ponto A igual a 437.596 m, quais são os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos A, C e D?

de	para	desnível (m)	σ (m)
A	B	10.509	0.006
B	C	5.360	0.004
C	D	-8.523	0.005
D	A	-7.348	0.003
B	D	-3.167	0.004
A	C	15.881	0.012

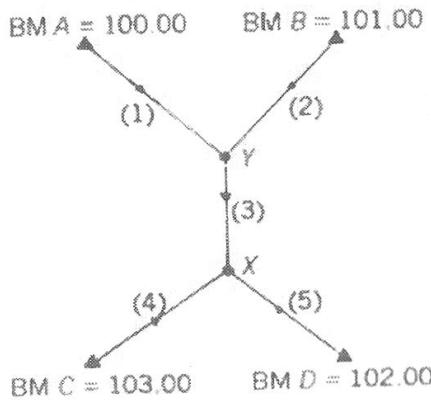


10. A figura representa uma rede de nivelamento onde se supõe que as observações têm igual peso, na qual as setas indicam desníveis positivos. Ajuste as altitudes dos pontos A, B e C.



linha	desnível observado (m)
1	5.10
2	2.34
3	1.25
4	6.13
5	0.68
6	3.00
7	1.70

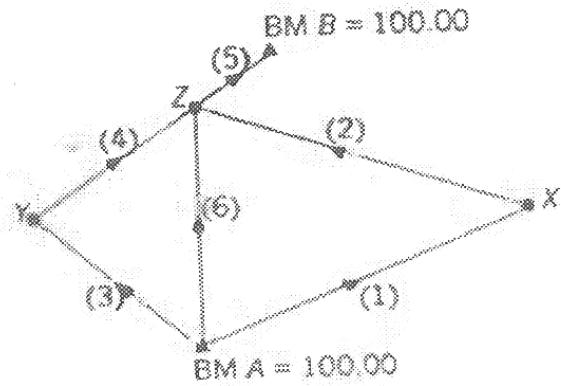
11. Para a rede de nivelamento indicada na figura, calcule o valor mais provável para as altitudes dos pontos X e Y admitindo que os desníveis têm pesos iguais.



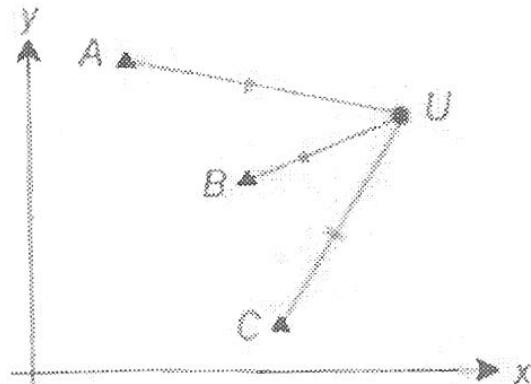
linha	desnível (m)
1	+1.00
2	+0.08
3	+0.92
4	-1.00
5	+0.08

12. Para a linha de nivelamento indicada na figura, calcule os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos X, Y e Z utilizando os valores da tabela (pese os desníveis de acordo com o comprimento de cada lanço).

linha	comprimento (km)	desnível (m)
1	4	+1.05
2	4	-0.95
3	2	+2.10
4	2	-1.95
5	1	+0.10
6	1	+0.05



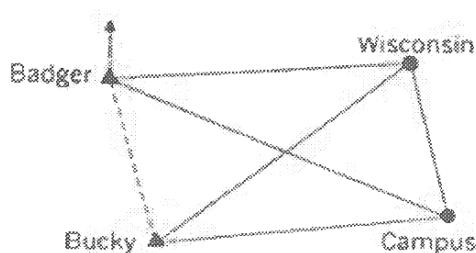
13. Relativamente à figura apresentada, suponha que foram medidas as distâncias $\ell_{AU} = 6049.00$ m, $\ell_{BU} = 4736.83$ m e $\ell_{CU} = 5446.49$ m, com as coordenadas em m dos pontos A, B e C respectivamente iguais a $(865.40, 4527.15)$, $(2432.55, 2047.25)$ e $(2865.22, 27.15)$. Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U.



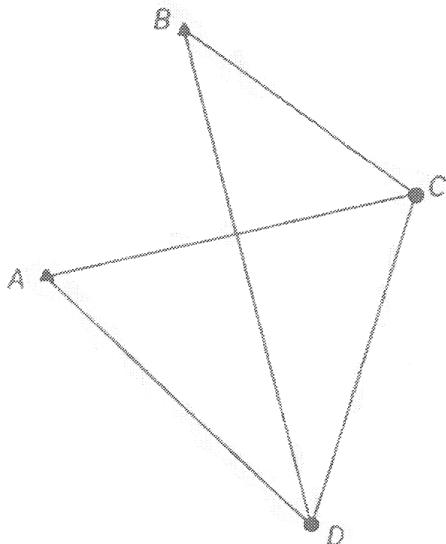
14. Tendo sido medidas as distâncias $\ell_A = 360.50 \pm 0.05$ m, $\ell_B = 250.10 \pm 0.05$ m, $\ell_C = 223.50 \pm 0.05$ m do ponto P para os pontos A, B, C de coordenadas conhecidas, obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas (X, Y) do ponto P, supondo $(X_A, Y_A) = (300, 300)$, $(X_B, Y_B) = (600, 250)$, $(X_C, Y_C) = (800, 400)$.

15. As coordenadas planimétricas dos pontos Badger e Bucky são, respectivamente, $x=2410000.000m$, $y=390000.000m$ e $x=2411820.000m$, $y=386881.222m$. Ajuste o quadrilátero da figura de forma a obter as coordenadas planas dos pontos Wisconsin e Campus.

Legend:



base	Distância (m)
Badger-Wisconsin	5870.302
Badger-Campus	7297.588
Wisconsin-Campus	3616.434
Wisconsin-Bucky	5742.878
Campus-Bucky	5123.760



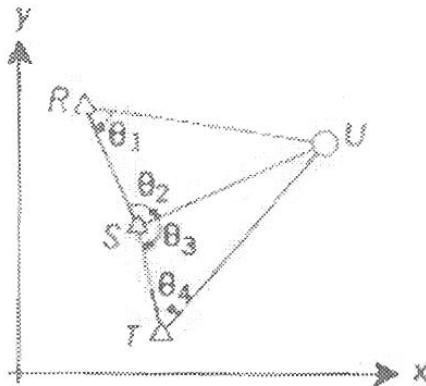
16. Efectue o ajustamento da trilateração indicada na figura sabendo que $DA=29593.10m$, $BC=22943.66m$, $AC=30728.80m$, $CD=28217.92m$, $BD=41470.26m$ e que $XA=110000.00m$, $YA=110000.00m$, $XB=121433.56m$, $YB=129803.51m$.

17. Considere a trilateração com os dados indicados nas tabelas

ponto	x (m)	y (m)
A	0.00	0.00
B	1000.00	0.00
C	0.00	1000.00

$AU=1653.92\pm 0.021m$ $BU=1067.24\pm 0.022m$ $CU=1298.10\pm 0.021m$

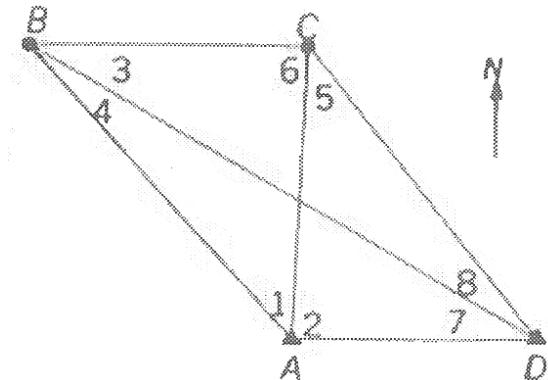
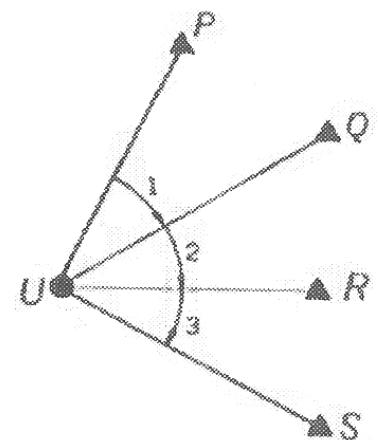
- Qual são os valores mais prováveis para as coordenadas do ponto U?
- Qual é o valor da variância a posteriori?
- Quais são os valores do desvio padrão a posteriori das coordenadas ajustadas?
- Indique os valores das distâncias ajustadas, os respectivos resíduos e desvio padrão



18. Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U, obtidas por intersecção directa a partir dos pontos R, S e T, sabendo que $\theta_1=50^{\circ}06'50''$, $\theta_2=101^{\circ}30'47''$, $\theta_3=98^{\circ}41'17''$, $\theta_4=59^{\circ}17'01''$ e $x_R=868.40\text{m}$, $y_R=4527.15\text{m}$, $x_S=2432.55\text{m}$, $y_S=2047.25\text{m}$, $x_T=2865.22\text{m}$, $y_T=27.15\text{m}$.

19. Considerando os dados da tabela e a figura seguintes, calcule os valores mais prováveis das coordenadas do ponto U, obtidos por intersecção inversa, sendo as coordenadas em m dos pontos visados são P(1303.599,1458.615), Q(1636.436,1310.468), R(1503.395, 888.362), S(1506.262,785.061).

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma (")$
P	U	Q	$30^{\circ}29'33''$	5
Q	U	R	$38^{\circ}30'31''$	6
R	U	S	$10^{\circ}29'57''$	6

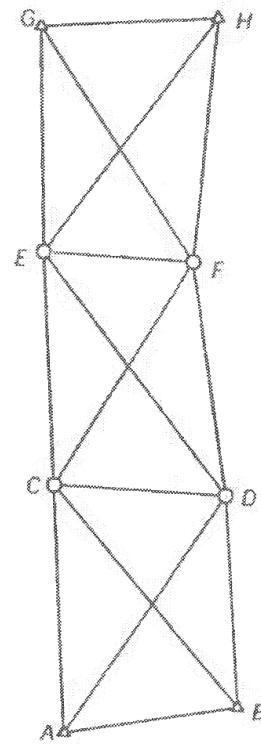


20. A figura mostra uma triangulação onde os ângulos observados têm os seguintes valores: $1=42^{\circ}35'29.0''$, $2=87^{\circ}35'10.6''$, $3=79^{\circ}54'42.1''$, $4=18^{\circ}28'22.4''$, $5=21^{\circ}29'23.9''$, $6=39^{\circ}01'35.4''$, $7=31^{\circ}20'45.8''$, $8=39^{\circ}34'27.9''$, tendo os pontos A e B as coordenadas $x_A=9270.33$, $y_A=8448.90$, $x_D=15610.58$, $y_D=8568.75$, em m. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas dos pontos B e C.

21. Os dados seguintes referem-se à rede de triangulação da figura.

Obtenha as coordenadas ajustadas dos pontos C, D, E, F.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	σ
C	A	D	$36^{\circ}33'49.5''$	4.6''
D	A	B	$47^{\circ}38'40.5''$	5.7''
A	B	C	$58^{\circ}42'05.4''$	5.7''
C	B	D	$36^{\circ}09'56.9''$	4.9''
B	C	A	$37^{\circ}05'18.5''$	4.6''
D	C	B	$46^{\circ}56'40.5''$	5.7''
B	D	A	$37^{\circ}29'08.7''$	5.0''
A	D	C	$59^{\circ}24'14.1''$	5.8''
E	C	F	$34^{\circ}33'22.5''$	4.8''
F	C	D	$61^{\circ}44'34.1''$	5.9''
C	D	E	$49^{\circ}39'14.4''$	5.7''
E	D	F	$28^{\circ}48'19.6''$	4.6''
F	E	D	$49^{\circ}20'57.4''$	6.2''
D	E	C	$34^{\circ}02'48.2''$	4.6''
D	F	C	$39^{\circ}47'51.2''$	4.8''
C	F	E	$62^{\circ}03'22.6''$	6.5''
G	E	H	$37^{\circ}47'58.1''$	4.8''
H	E	F	$56^{\circ}46'43.5''$	6.3''
E	F	G	$52^{\circ}58'05.9''$	6.4''
G	F	H	$39^{\circ}04'18.8''$	4.7''
F	G	E	$32^{\circ}27'12.1''$	4.8''
H	G	F	$59^{\circ}21'51.3''$	5.7''
F	H	E	$31^{\circ}10'44.3''$	4.6''
E	H	G	$50^{\circ}22'53.5''$	5.6''

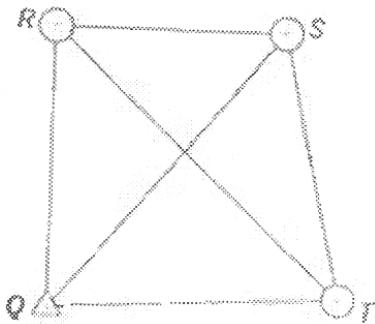


pontos fixos		
estação	x	y
A	1718.871	632.095
B	2191.570	715.709
G	1590.370	2560.743
H	2076.006	2597.745

coordenadas aproximadas		
estação	x	y
C	1668.571	1310.429
D	2139.109	1296.242
E	1617.479	1949.217
F	2028.688	1934.566

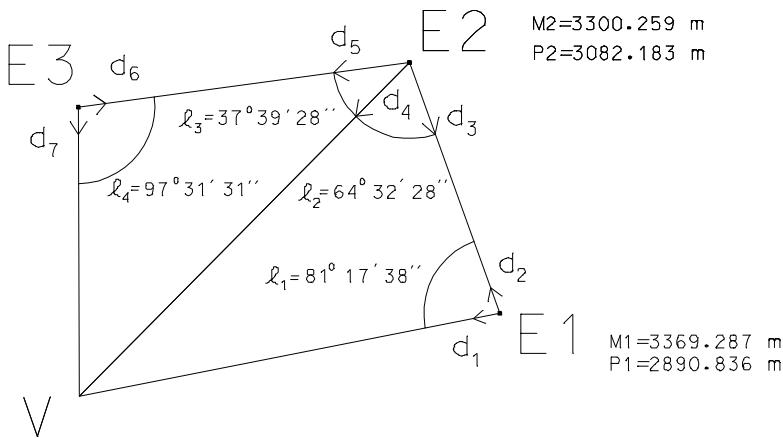
22. O ponto Q da rede ilustrada na figura tem coordenadas em m (1000.00,1000.00), sendo o rumo da direcção QR= $0^{\circ}06'24.5''$, com uma incerteza igual a $\pm 0.001''$. Utilizando os dados das tabelas, ajuste a rede.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma (")$
R	Q	S	$38^{\circ}48'50.7''$	4.0
S	Q	T	$47^{\circ}46'12.4''$	4.0
T	Q	R	$273^{\circ}24'56.5''$	4.4
Q	R	S	$269^{\circ}57'33.4''$	4.7
R	S	T	$257^{\circ}32'56.8''$	4.7
S	T	Q	$279^{\circ}04'31.2''$	4.5
S	R	T	$42^{\circ}52'51.0''$	4.3
S	R	Q	$90^{\circ}02'26.7''$	4.5
Q	S	R	$51^{\circ}08'45.0''$	4.3
T	S	Q	$51^{\circ}18'16.2''$	4.0
Q	T	R	$46^{\circ}15'02.0''$	4.0
R	T	S	$34^{\circ}40'05.7''$	4.0



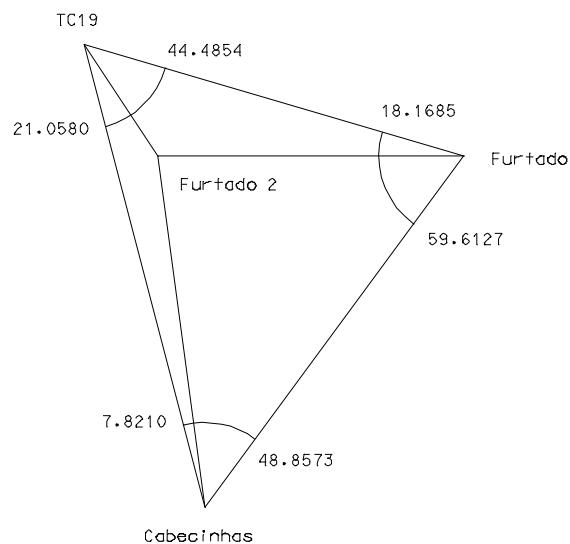
estação	visado	distância (m)	$\sigma (m)$
Q	R	1640.016	0.026
R	S	1320.001	0.024
S	T	1579.123	0.025
T	Q	1664.524	0.026
Q	S	2105.962	0.029
R	T	2266.035	0.030

$M_3=3047.954$ m
 $P_3=3048.344$ m

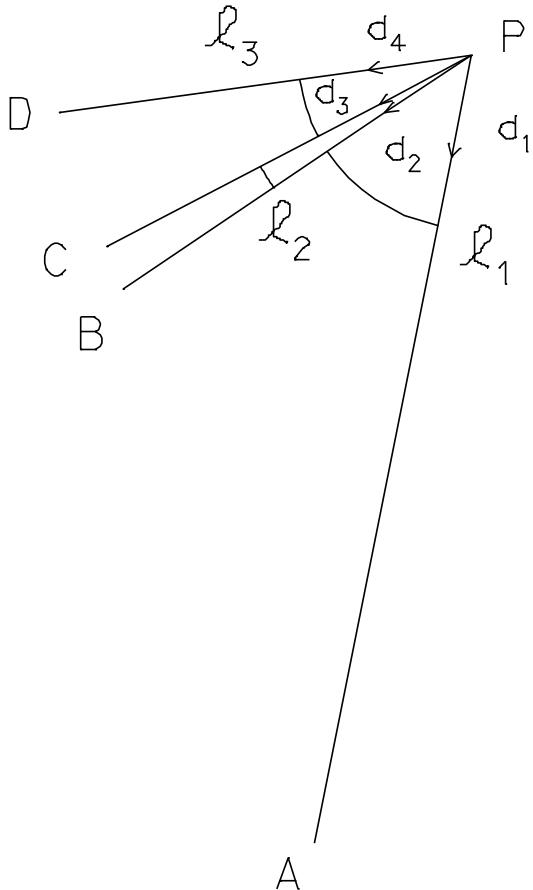


23. A figura indica as observações de direcção efectuadas, tendo em vista a obtenção dos ângulos utilizados na coordenação do ponto V por intersecção directa a partir dos pontos E1, E2 e E3, cujas coordenadas também estão indicadas. Supondo que o desvio padrão das observações de direcção é igual a $2''$, efectue a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto V.

24. Calcule, efectuando um ajustamento por mínimos quadrados, as coordenadas do ponto Furtado 2º, sabendo que as coordenadas dos vértices estacionados são: Cabecinhas(15821.182, -14408.496), Furtado(17000.873, -12805.293) e TC19(15268.780, -12297.195). As unidades angulares são grados. A precisão das observações de direcção é igual a 0.0005 grados.



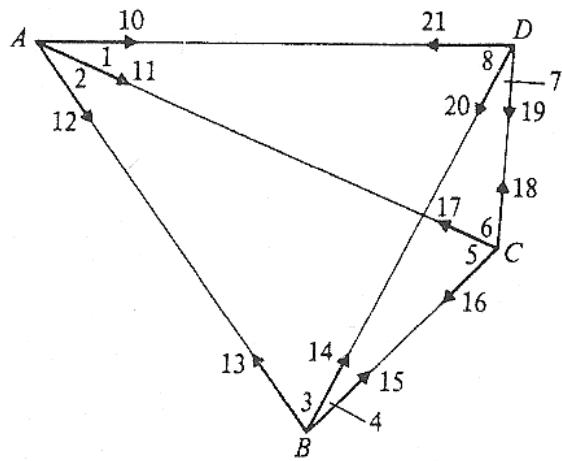
25. A figura seguinte mostra a disposição do ponto P cujas coordenadas se pretende obter por ajustamento de uma intersecção inversa. As observações e as coordenadas dos pontos visados estão indicadas nas tabelas:



Estação	M (m)	P (m)
A	88237.92	80132.03
B	82279.10	97418.58
C	81802.35	98696.21
D	80330.69	102911.40

Ponto visado	Leitura azimutal	Precisão
A	0º 00' 00''	5''
B	44º 55' 30.5''	5''
C	50º 51' 49.9''	5''
D	70º 48' 08.2''	5''

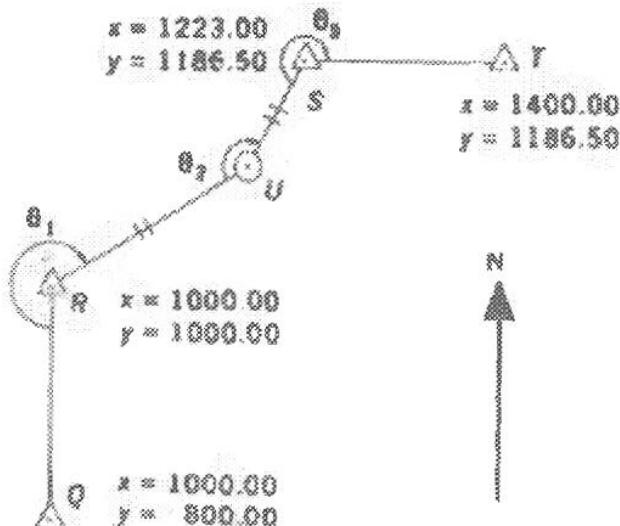
26. Considerando o quadrilátero plano representado na figura, tendo sido efectuadas observações de direcção azimutal em cada um dos vértices visando os vértices restantes, efectue o ajustamento das observações. No ajustamento terá naturalmente que ser utilizado o modelo condicional, onde não intervêm parâmetros (coordenadas dos vértices). Supõem-se as observações de direcção não correlacionadas e de igual precisão.



Quadrilátero

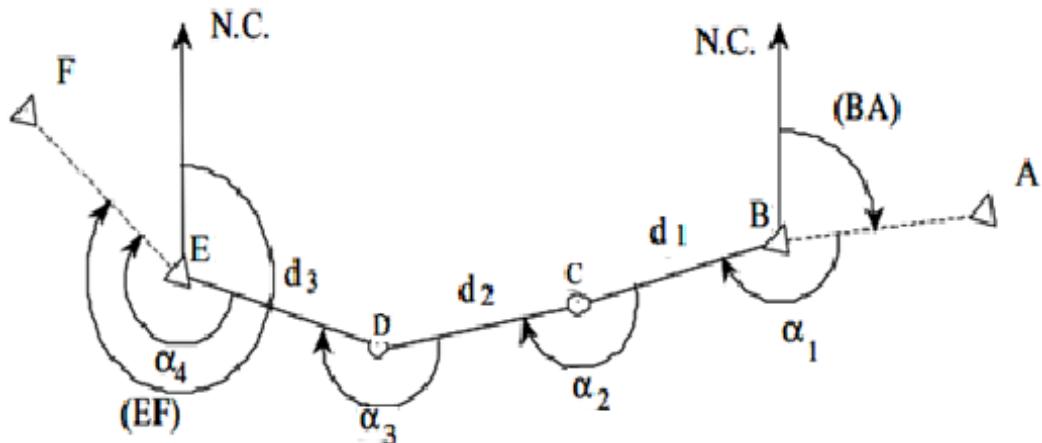
direcções, d	valor
10	00º 00' 00".00
11	22º 01' 42".51
12	38º 46' 13".71
13	00º 00' 00".00
14	57º 08' 57".10
15	76º 42' 11".23
16	00º 00' 00".00
17	86º 33' 13".45
18	145º 19' 49".38
19	00º 00' 00".00
20	15º 06' 52".28
21	99º 11' 42".94

Direcções azimutais observadas



27. A figura ilustra uma poligonal em que $RU=200.00 \pm 0.05\text{m}$, $US=100.00 \pm 0.08\text{m}$, $\theta_1=240^000' \pm 30''$, $\theta_2=150^000' \pm 30''$, $\theta_3=240^001' \pm 30''$, estando as coordenadas dos pontos R, Q, S e T indicadas na figura. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto U.

28. Determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos pontos C e D da poligonal representada na figura

DADOS:

$$M_B = 8478,139 \text{ m}$$

$$P_B = 2483,826 \text{ m}$$

$$M_F = 7709,336 \text{ m}$$

$$P_F = 2263,411 \text{ m}$$

$$(BA) = 68^\circ 15' 20,7''$$

$$(EF) = 300^\circ 11' 30,5''$$

QUANTIDADES OBSERVADAS:

$$\alpha_1 = 172^\circ 53' 34'' \pm 2''$$

$$\alpha_2 = 185^\circ 22' 14'' \pm 2''$$

$$\alpha_3 = 208^\circ 26' 19'' \pm 2''$$

$$\alpha_4 = 205^\circ 13' 51'' \pm 2''$$

$$d_1 = 281,832 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_2 = 271,300 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_3 = 274,100 \pm 0,016 \text{ m}$$

PEDIDOS:

$$M_C = ?$$

$$P_C = ?$$

$$M_D = ?$$

$$P_D = ?$$

