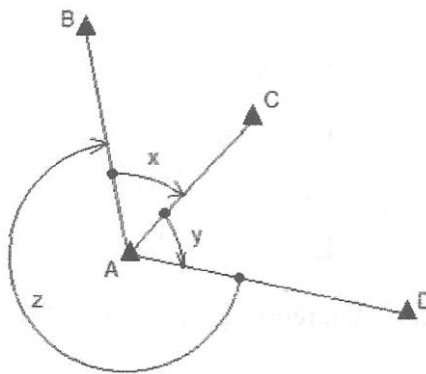
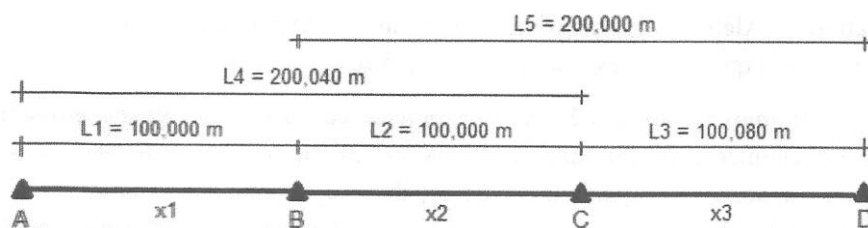


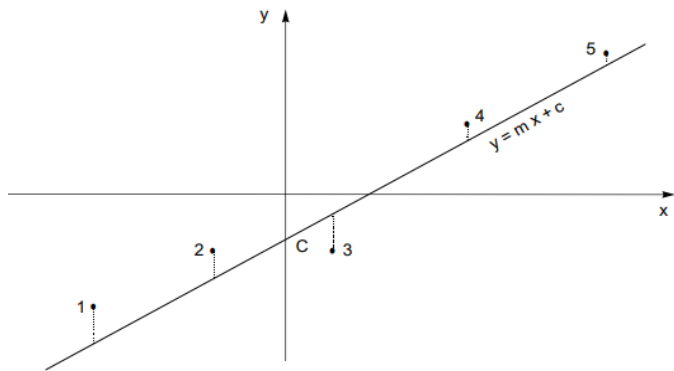
## Exercícios:

1. Sejam  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  três medições não correlacionadas e de igual precisão de uma distância. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados do valor mais provável da distância.
2. Os 3 ângulos internos de um triângulo plano são  $\ell_1 = 45^\circ 25' 01''$ ,  $\ell_2 = 65^\circ 20' 00''$ ,  $\ell_3 = 69^\circ 15' 02''$ . Obtenha a estimativa por mínimos quadrados dos 3 ângulos supondo que as observações são não correlacionadas e de igual precisão.
3. Os três ângulos horizontais medidos, conforme a figura são  $x=42^\circ 17'$ ,  $y=60^\circ 48'$ ,  $z=256^\circ 52'$ . Ajuste estes ângulos de maneira a que a respectiva soma seja igual a  $360^\circ$ .



4. Numa base foram medidos os segmentos AB, BC, CD, AC e BD; as medidas são não correlacionadas e de igual precisão, estando os valores medidos indicados na figura. Ajustar as observações e determinar a distância AD.





ponto	x (mm)	y (mm)
1	-40.0	-24.0
2	-15.0	-12.0
3	10.0	-12.0
4	38.0	15.0
5	67.0	30.0

5. A figura mostra a posição dos 5 pontos, cujas coordenadas, de igual precisão, estão indicadas na tabela. Ajuste uma recta a esses pontos, supondo que os resíduos estão associados apenas aos valores de  $y$ , o que leva a equações de observação da forma  $y_k + v_{ky} = mx_k + b$ . Adoptando este tipo de equações de observação assume-se que há inconsistências entre o modelo e as observações e que estas inconsistências em  $x$  e em  $y$  estão agrupadas nos resíduos, somados ao 1º membro do modelo matemático. As equações podiam ter a forma  $y_k + v_{ky} = m(x_k + v_{kx}) + b$ , onde  $v_{ky}$  e  $v_{kx}$  são resíduos associados às coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto  $k$  mas estas equações requerem um tipo mais complexo de ajustamento por mínimos quadrados.

6. Ajuste uma circunferência aos pontos da tabela.

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0.000	0.000
1	0.500	0.250
2	1.000	1.000
3	1.500	2.250
4	2.000	4.000
5	2.500	6.250
6	3.000	9.000

7. Pretende-se ajustar uma curva parabólica vertical aos 6 pontos do terreno indicados na figura através da respectiva quilometragem e altitude. Obtenha os parâmetros dessa parábola, da forma  $y_k + v_k = ax_k^2 + bx_k + c$ .

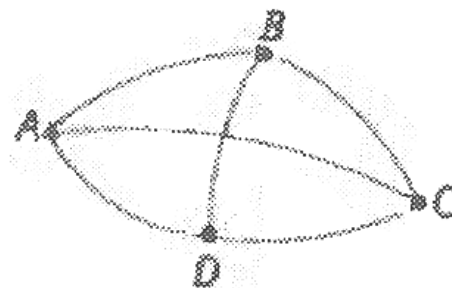
Datum RL 50.00		Natural Surface					
Red. Level	63.48	46.20	36.62	38.96	47.42	57.72	
Chainage	100	150	200	250	300	350	

ponto	X	Y
7	54.58	17.11
8	45.47	36.56
9	28.40	53.22
10	2.02	63.72
11	28.12	63.44
12	57.49	52.55
13	80.85	34.20
14	98.08	9.14
15	105.69	17.30
16	103.83	46.96
17	88.42	71.50
18	61.26	86.84
19	26.47	91.07
20	6.59	81.37

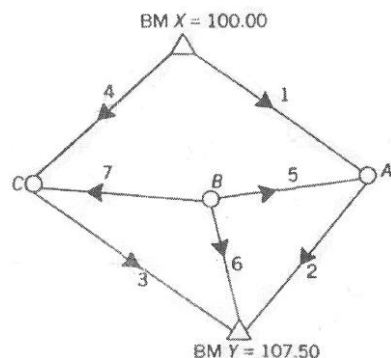
8. Ajuste uma elipse aos pontos da tabela sabendo que a equação cartesiana de uma elipse é  $aX^2+2hXY+bY^2+dX+eY=1$ , a partir da qual é possível obter a equação de observação  $v_k+aX_k^2+2hX_kY_k+bY_k^2+dX_k+eY_k=1$ .

9. A observação da rede de nivelamento indicada na figura forneceu os seguintes resultados. Sendo a altitude do ponto A igual a 437.596 m, quais são os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos A, C e D?

de	para	desnível (m)	$\sigma$ (m)
A	B	10.509	0.006
B	C	5.360	0.004
C	D	-8.523	0.005
D	A	-7.348	0.003
B	D	-3.167	0.004
A	C	15.881	0.012

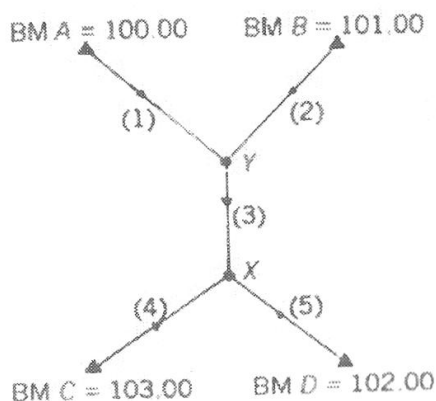


10. A figura representa uma rede de nivelamento onde se supõe que as observações têm igual peso, na qual as setas indicam desníveis positivos. Ajuste as altitudes dos pontos A, B e C.



linha	desnível observado (m)
1	5.10
2	2.34
3	1.25
4	6.13
5	0.68
6	3.00
7	1.70

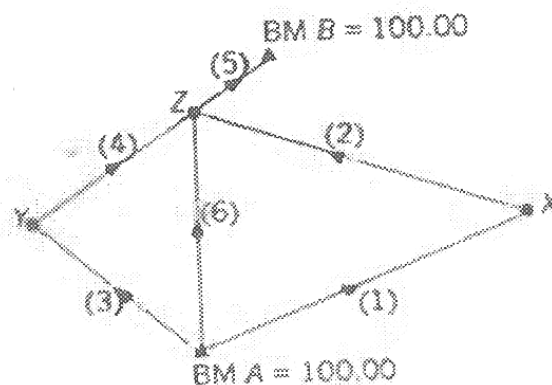
11. Para a rede de nivelamento indicada na figura, calcule o valor mais provável para as altitudes dos pontos X e Y admitindo que os desníveis têm pesos iguais.



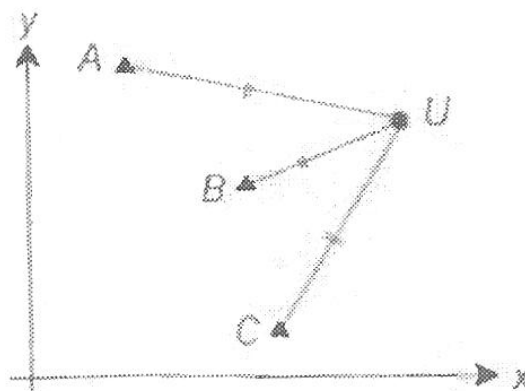
linha	desnível (m)
1	+1.00
2	+0.08
3	+0.92
4	-1.00
5	+0.08

12. Para a linha de nivelamento indicada na figura, calcule os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos X, Y e Z utilizando os valores da tabela (pese os desníveis de acordo com o comprimento de cada lança).

linha	comprimento (km)	desnível (m)
1	4	+1.05
2	4	-0.95
3	2	+2.10
4	2	-1.95
5	1	+0.10
6	1	+0.05

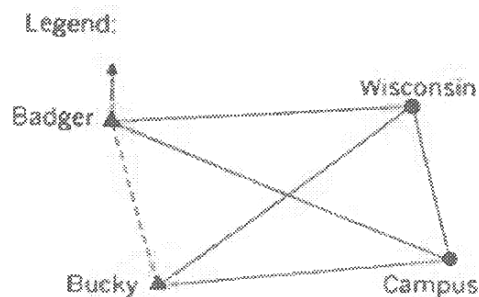


13. Relativamente à figura apresentada, suponha que foram medidas as distâncias  $\ell_{AU} = 6049.00$  m,  $\ell_{BU} = 4736.83$  m e  $\ell_{CU} = 5446.49$  m, com as coordenadas em m dos pontos A, B e C respectivamente iguais a (865.40, 4527.15), (2432.55, 2047.25) e (2865.22, 27.15). Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U.

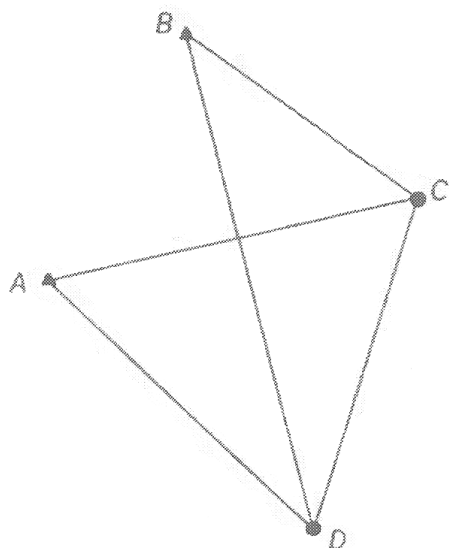


14. Tendo sido medidas as distâncias  $\ell_A = 360.50 \pm 0.05$  m,  $\ell_B = 250.10 \pm 0.05$  m,  $\ell_C = 223.50 \pm 0.05$  m do ponto P para os pontos A, B, C de coordenadas conhecidas, obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas (X,Y) do ponto P, supondo  $(X_A, Y_A) = (300, 300)$ ,  $(X_B, Y_B) = (600, 250)$ ,  $(X_C, Y_C) = (800, 400)$ .

15. As coordenadas planimétricas dos pontos Badger e Bucky são, respectivamente,  $x=2410000.000\text{m}$ ,  $y=390000.000\text{m}$  e  $x=2411820.000\text{m}$ ,  $y=386881.222\text{m}$ . Ajuste o quadrilátero da figura de forma a obter as coordenadas planas dos pontos Wisconsin e Campus.



base	Distância (m)
Badger-Wisconsin	5870.302
Badger-Campus	7297.588
Wisconsin-Campus	3616.434
Wisconsin-Bucky	5742.878
Campus-Bucky	5123.760



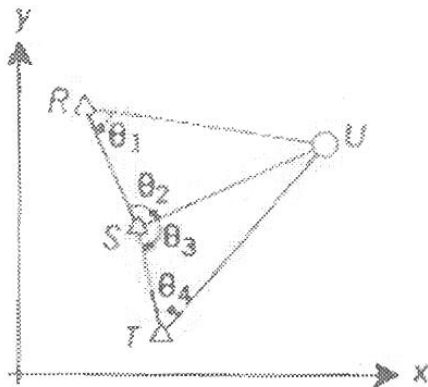
16. Efectue o ajustamento da trileração indicada na figura sabendo que  $DA=29593.10\text{m}$ ,  $BC=22943.66\text{m}$ ,  $AC=30728.80\text{m}$ ,  $CD=28217.92\text{m}$ ,  $BD=41470.26\text{m}$  e que  $XA=110000.00\text{m}$ ,  $YA=110000.00\text{m}$ ,  $XB=121433.56\text{m}$ ,  $YB=129803.51\text{m}$ .

17. Considere a trileração com os dados indicados nas tabelas

ponto	x (m)	y (m)
A	0.00	0.00
B	1000.00	0.00
C	0.00	1000.00

$AU=1653.92\pm 0.021\text{m}$	$BU=1067.24\pm 0.022\text{m}$	$CU=1298.10\pm 0.021\text{m}$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

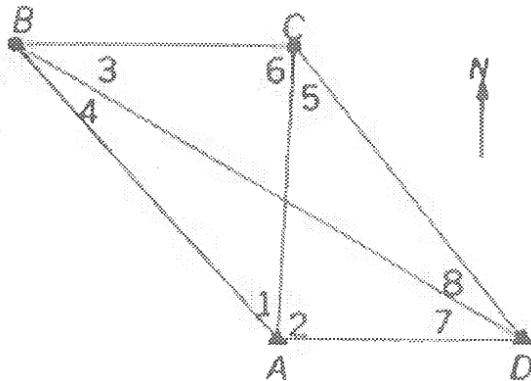
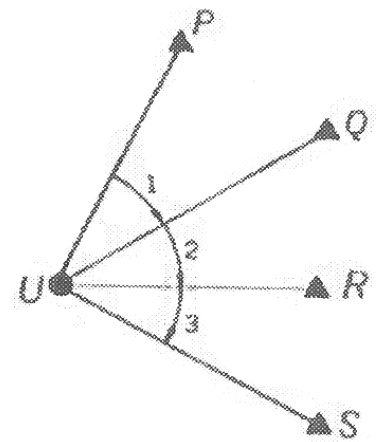
- Qual são os valores mais prováveis para as coordenadas do ponto U?
- Qual é o valor da variância a posteriori?
- Quais são os valores do desvio padrão a posteriori das coordenadas ajustadas?
- Indique os valores das distâncias ajustadas, os respectivos resíduos e desvio padrão



18. Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U, obtidas por intersecção directa a partir dos pontos R, S e T, sabendo que  $\theta_1=50^{\circ}06'50''$ ,  $\theta_2=101^{\circ}30'47''$ ,  $\theta_3=98^{\circ}41'17''$ ,  $\theta_4=59^{\circ}17'01''$  e  $x_R=868.40\text{m}$ ,  $y_R=4527.15\text{m}$ ,  $x_S=2432.55\text{m}$ ,  $y_S=2047.25\text{m}$ ,  $x_T=2865.22\text{m}$ ,  $y_T=27.15\text{m}$ .

19. Considerando os dados da tabela e a figura seguintes, calcule os valores mais prováveis das coordenadas do ponto U, obtidos por intersecção inversa, sendo as coordenadas em m dos pontos visados são  $P(1303.599,1458.615)$ ,  $Q(1636.436,1310.468)$ ,  $R(1503.395, 888.362)$ ,  $S(1506.262,785.061)$ .

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma$ (")
P	U	Q	$30^{\circ}29'33''$	5
Q	U	R	$38^{\circ}30'31''$	6
R	U	S	$10^{\circ}29'57''$	6

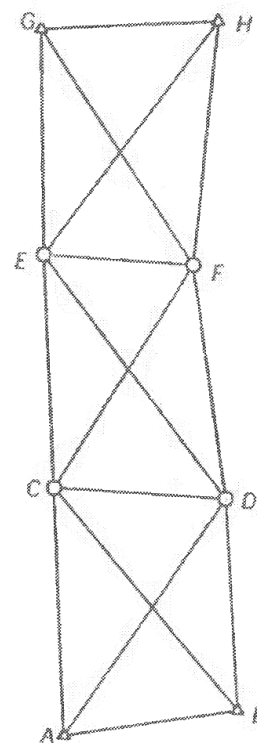


20. A figura mostra uma triangulação onde os ângulos observados têm os seguintes valores:  $1=42^{\circ}35'29.0''$ ,  $2=87^{\circ}35'10.6''$ ,  $3=79^{\circ}54'42.1''$ ,  $4=18^{\circ}28'22.4''$ ,  $5=21^{\circ}29'23.9''$ ,  $6=39^{\circ}01'35.4''$ ,  $7=31^{\circ}20'45.8''$ ,  $8=39^{\circ}34'27.9''$ , tendo os pontos A e B as coordenadas  $x_A=9270.33$ ,  $y_A=8448.90$ ,  $x_D=15610.58$ ,  $y_D=8568.75$ , em m. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas dos pontos B e C.

21. Os dados seguintes referem-se à rede de triangulação da figura.

Obtenha as coordenadas ajustadas dos pontos C, D, E, F.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma$
C	A	D	$36^{\circ}33'49.5''$	$4.6''$
D	A	B	$47^{\circ}38'40.5''$	$5.7''$
A	B	C	$58^{\circ}42'05.4''$	$5.7''$
C	B	D	$36^{\circ}09'56.9''$	$4.9''$
B	C	A	$37^{\circ}05'18.5''$	$4.6''$
D	C	B	$46^{\circ}56'40.5''$	$5.7''$
B	D	A	$37^{\circ}29'08.7''$	$5.0''$
A	D	C	$59^{\circ}24'14.1''$	$5.8''$
E	C	F	$34^{\circ}33'22.5''$	$4.8''$
F	C	D	$61^{\circ}44'34.1''$	$5.9''$
C	D	E	$49^{\circ}39'14.4''$	$5.7''$
E	D	F	$28^{\circ}48'19.6''$	$4.6''$
F	E	D	$49^{\circ}20'57.4''$	$6.2''$
D	E	C	$34^{\circ}02'48.2''$	$4.6''$
D	F	C	$39^{\circ}47'51.2''$	$4.8''$
C	F	E	$62^{\circ}03'22.6''$	$6.5''$
G	E	H	$37^{\circ}47'58.1''$	$4.8''$
H	E	F	$56^{\circ}46'43.5''$	$6.3''$
E	F	G	$52^{\circ}58'05.9''$	$6.4''$
G	F	H	$39^{\circ}04'18.8''$	$4.7''$
F	G	E	$32^{\circ}27'12.1''$	$4.8''$
H	G	F	$59^{\circ}21'51.3''$	$5.7''$
F	H	E	$31^{\circ}10'44.3''$	$4.6''$
E	H	G	$50^{\circ}22'53.5''$	$5.6''$

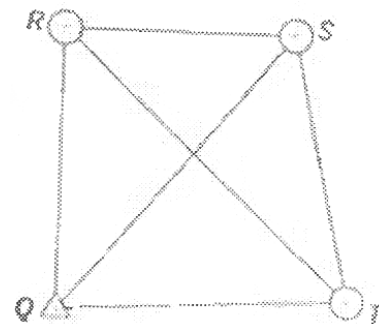


pontos fixos		
estação	x	y
A	1718.871	632.095
B	2191.570	715.709
G	1590.370	2560.743
H	2076.006	2597.745

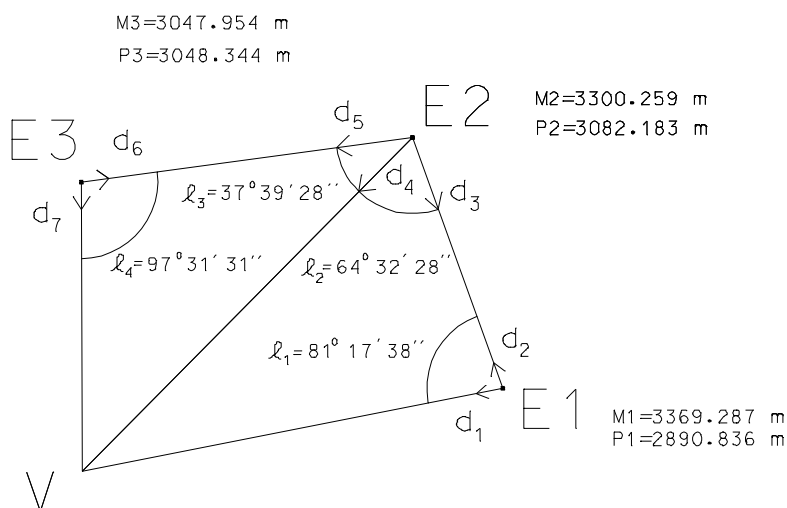
coordenadas aproximadas		
estação	x	y
C	1668.571	1310.429
D	2139.109	1296.242
E	1617.479	1949.217
F	2028.688	1934.566

22. O ponto Q da rede ilustrada na figura tem coordenadas em m (1000.00,1000.00), sendo o rumo da direcção QR=0°06'24.5", com uma incerteza igual a  $\pm 0.001''$ . Utilizando os dados das tabelas, ajuste a rede.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma (")$
R	Q	S	38°48'50.7"	4.0
S	Q	T	47°46'12.4"	4.0
T	Q	R	273°24'56.5"	4.4
Q	R	S	269°57'33.4"	4.7
R	S	T	257°32'56.8"	4.7
S	T	Q	279°04'31.2"	4.5
S	R	T	42°52'51.0"	4.3
S	R	Q	90°02'26.7"	4.5
Q	S	R	51°08'45.0"	4.3
T	S	Q	51°18'16.2"	4.0
Q	T	R	46°15'02.0"	4.0
R	T	S	34°40'05.7"	4.0



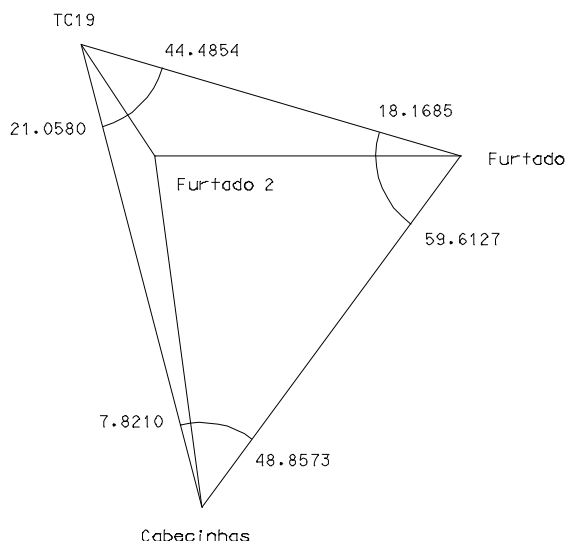
estação	visado	distância (m)	$\sigma$ (m)
Q	R	1640.016	0.026
R	S	1320.001	0.024
S	T	1579.123	0.025
T	Q	1664.524	0.026
Q	S	2105.962	0.029
R	T	2266.035	0.030



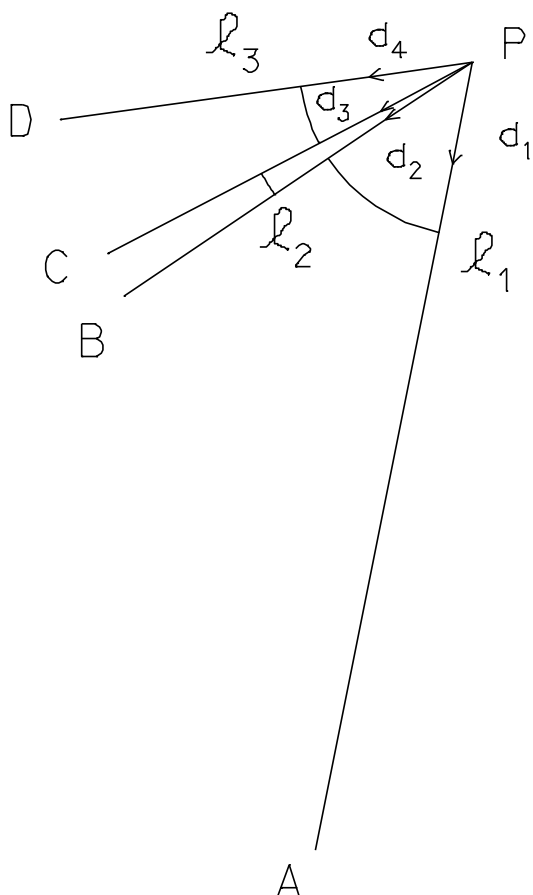
23. A figura indica as observações de direcção efectuadas, tendo em vista a obtenção dos ângulos utilizados na coordenação do ponto V por intersecção directa a partir dos pontos E1, E2 e E3, cujas coordenadas também estão indicadas. Supondo que o desvio padrão das observações de direcção é igual a 2'', efectue a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto V.



24. Calcule, efectuando um ajustamento por mínimos quadrados, as coordenadas do ponto Furtado 2<sup>o</sup>, sabendo que as coordenadas dos vértices estacionados são: Cabecinhas(15821.182, -14408.496), Furtado(17000.873, -12805.293) e TC19(15268.780, -12297.195). As unidades angulares são graus. A precisão das observações de direcção é igual a 0.0005 graus.



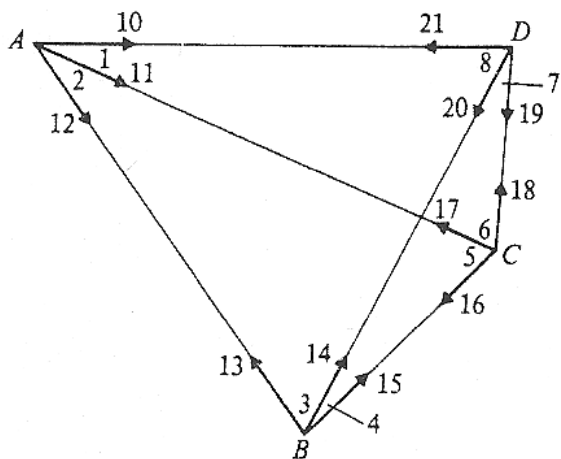
25. A figura seguinte mostra a disposição do ponto P cujas coordenadas se pretende obter por ajustamento de uma intersecção inversa. As observações e as coordenadas dos pontos visados estão indicadas nas tabelas:



Estação	M (m)	P (m)
A	88237.92	80132.03
B	82279.10	97418.58
C	81802.35	98696.21
D	80330.69	102911.40

Ponto visado	Leitura azimutal	Precisão
A	0° 00' 00"	5"
B	44° 55' 30.5"	5"
C	50° 51' 49.9"	5"
D	70° 48' 08.2"	5"

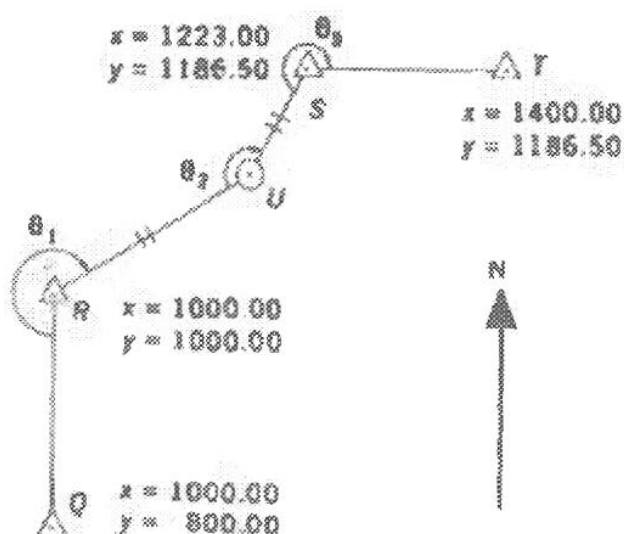
26. Considerando o quadrilátero plano representado na figura, tendo sido efectuadas observações de direcção azimutal em cada um dos vértices visando os vértices restantes, efectue o ajustamento das observações. No ajustamento terá naturalmente que ser utilizado o modelo condicional, onde não intervêm parâmetros (coordenadas dos vértices). Supõem-se as observações de direcção não correlacionadas e de igual precisão.



Quadrilátero

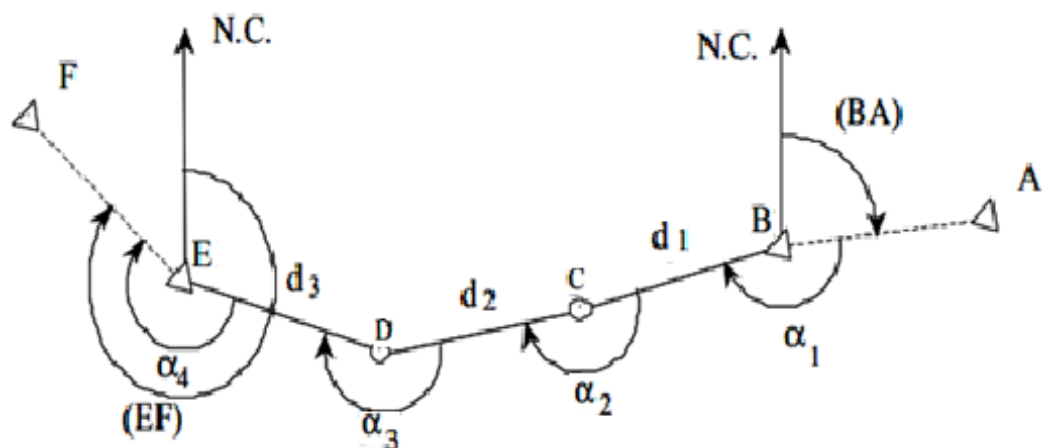
direcções, d	valor
10	00° 00' 00".00
11	22° 01' 42".51
12	38° 46' 13".71
13	00° 00' 00".00
14	57° 08' 57".10
15	76° 42' 11".23
16	00° 00' 00".00
17	86° 33' 13".45
18	145° 19' 49".38
19	00° 00' 00".00
20	15° 06' 52".28
21	99° 11' 42".94

Direcções azimutais observadas



27. A figura ilustra uma poligonal em que  $RU=200.00\pm0.05m$ ,  $US=100.00\pm0.08m$ ,  $\theta_1=240^\circ00'\pm30''$ ,  $\theta_2=150^\circ00'\pm30''$ ,  $\theta_3=240^\circ01'\pm30''$ , estando as coordenadas dos pontos R, Q, S e T indicadas na figura. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto U.

28. Determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos pontos C e D da poligonal representada na figura

DADOS:

$$M_B = 8478,139 \text{ m}$$

$$P_B = 2483,826 \text{ m}$$

$$M_F = 7709,336 \text{ m}$$

$$P_F = 2263,411 \text{ m}$$

$$(BA) = 68^\circ 15' 20,7''$$

$$(EF) = 300^\circ 11' 30,5''$$

QUANTIDADES  
OBSERVADAS:

$$\alpha_1 = 172^\circ 53' 34'' \pm 2''$$

$$\alpha_2 = 185^\circ 22' 14'' \pm 2''$$

$$\alpha_3 = 208^\circ 26' 19'' \pm 2''$$

$$\alpha_4 = 205^\circ 13' 51'' \pm 2''$$

$$d_1 = 281,832 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_2 = 271,300 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_3 = 274,100 \pm 0,016 \text{ m}$$

PEDIDOS:

$$M_C = ?$$

$$P_C = ?$$

$$M_D = ?$$

$$P_D = ?$$

