

pergunta modelo

Apresente exemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades, se existirem. Se não existirem, justifique.

- a) limitado, finito
 - b) limitado, infinito
 - c) não limitado, finito
 - d) não limitado, infinito
-

a) $\{0\}$, $\{0, 1, 3\}$

b) $[0, 1]$, $]2, 5[$

d) $[0, +\infty[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

c) Qualquer conjunto finito é limitado.

demonstração: por indução matemática

Um conjunto atômico (com um só elemento) tem diâmetro zero, portanto é limitado.

Para provar o passo de indução, consideremos um conjunto A com n elementos. ~~Hipótese de indução~~ A é limitado.

Hipótese de indução: qualquer conjunto com $n-1$ elementos é limitado.

Escolhemos $a \in A$ um elemento qualquer.

O conjunto $B = A - \{a\}$ tem $n-1$ elementos, portanto B é limitado. Conforme o Lema abaixo, $A = B \cup \{a\}$ é limitado por ser união de dois conjuntos limitados.

Lema Sejam C, D subconjuntos num espaço métrico (X, d) . Se ambos são limitados, então $C \cup D$ é limitado.

Convém perguntar ao professor, durante o exame, se podemos considerar o Lema conhecido ou se é necessário demonstrá-lo.