

Meteorologia – Solução das séries de exercícios

1º Semestre - 2025/26

5. Introdução à dinâmica

Exercício 5.1.

Um satélite artificial é colocado em órbita. Calcule a altitude a que o mesmo deve estar de modo a permanecer sobre o mesmo ponto na Terra (geostacionário).

- No Equador.
- Em Lisboa ($\varphi = 39^\circ$).
- Discuta a diferença observada.

Solução:

a) Começamos pela soma de todas as forças que atuam sobre o satélite artificial:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = 0$$

Esta soma é nula porque o satélite está em órbita geostacionária, portanto encontra-se com velocidade constante para que observe sempre o mesmo ponto sobre o planeta (logo, aceleração nula).

Podemos ainda assumir o termo de Coriolis como nulo uma vez estarmos sobre o Equador ($\varphi = 0^\circ$ e $\sin \varphi = 0$). Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -G \frac{Mm}{z^2} \vec{u}_r + m \Omega^2 z \vec{u}_r &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \Omega^2 z \vec{u}_r &= G \frac{Mm}{z^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Omega^2 z &= \frac{GM}{z^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^3 &= \frac{GM}{\Omega^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[3]{\frac{6.673 \times 10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}] \times 5.972 \times 10^{24} [kg]}{(7.292 \times 10^{-5} [s])^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= 42\,161 [km] \end{aligned}$$

Como a Terra tem um raio de 6 371 [km], o satélite está a uma altitude de 42 161 [km] – 6 371 [km] = 35 790 [km].

Exercício 5.2.

Se um jogador de baseball atira uma bola a uma distância horizontal de 100 [m] em 4 [s], qual a deflexão horizontal em resultado da rotação da Terra?

- A 30°N.
- A 80°N.
- Discuta a diferença observada.

Solução:

a) Assumindo um movimento com velocidade média de $\bar{v} = \frac{100 [m]}{4 [s]} = 25 [m s^{-1}]$. Podemos então calcular a aceleração pelo efeito de Coriolis:

$$\begin{aligned} |a_{CO}| &= -fu = -2\Omega \sin \varphi u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |a_{CO}| &= -2 \times 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}] \times \sin(30) \times 25 [ms^{-1}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |a_{CO}| &= -1.823 \times 10^{-3} [m s^{-2}] \end{aligned}$$

Usando a expressão para o movimento sobre aceleração constante:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= \frac{1}{2} \times -1.823 \times 10^{-3} [m \ s^{-2}] \times 4^2 [s^2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= -0.0146 [m] = -1.46 [cm] \end{aligned}$$

a) Aplicando o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned} |a_{CO}| &= -fu = -2\Omega \sin \varphi u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |a_{CO}| &= -2 \times 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}] \times \sin(80) \times 25 [ms^{-1}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |a_{CO}| &= -3.59 \times 10^{-3} [m \ s^{-2}] \end{aligned}$$

Usando a expressão para o movimento sobre aceleração constante:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= \frac{1}{2} \times -3.59 \times 10^{-3} [m \ s^{-2}] \times 4^2 [s^2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= -0.0287 [m] = -2.87 [cm] \end{aligned}$$

c) Quanto maior a aproximação ao polo, maior o efeito da força aparente de Coriolis sobre um corpo em movimento.

Exercício 5.3.

Duas bolas com 4 cm de diâmetro são colocadas a 100 [m] de distância uma da outra num plano horizontal sem atrito. Se as bolas forem atiradas na direção uma da outra com a mesma velocidade, qual o valor que a mesma terá de ter de modo a que as bolas não choquem uma com a outra.

- A 43°N.
- A 1°N.
- Discuta a diferença observada.

Solução:

Para que não choquem, é necessário que as bolas sofram um desvio de pelo menos 0.02 [m] em 50 [m] de deslocação. Podemos reverter o raciocínio do exercício anterior para calcular a velocidade:

a)

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= \frac{1}{2}(-2\Omega \sin \varphi u) \left(\frac{x}{u}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy &= \Omega \sin \varphi \frac{x^2}{u} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= \Omega \sin \varphi \frac{x^2}{dy} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}] \times \sin(43) \times \frac{50^2 [m^2]}{0.02 [m]} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= 6.22 [m \ s^{-1}] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u &= \Omega \sin \varphi \frac{x^2}{dy} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}] \times \sin(1) \times \frac{50^2 [m^2]}{0.02 [m]} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= 0.159 [m \ s^{-1}] \end{aligned}$$

c) O efeito da força aparente junto ao Equador é muito baixa pelo que, nesta região, as bolas terão de ter uma velocidade menor para que se produza um efeito similar à força causada às latitudes médias.

Exercício 5.4.

Qual é o deslocamento horizontal de um corpo deixado cair de uma plataforma fixa a uma altura h no equador? Despreze os efeitos da resistência do ar. Qual o valor numérico deste deslocamento para $h = 5$ [km]?

Solução:

A componente leste da aceleração de Coriolis vem dada por (assumindo que estamos sobre o Equador, temos $\cos \varphi = \cos 0 = 1$, e portanto ignoramos o fator de latitude nestes cálculos):

$$a_{CO,x} = -2\Omega v_z = -2\Omega(-gt) = 2\Omega gt$$

Integrando para obter $v_x(t)$ e depois $x(t)$:

$$v_x(t) = \int_0^t a_x(t') dt' = \int_0^t 2\Omega gt' dt' = \Omega gt^2$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \int_0^t \Omega gt'^2 dt' = \frac{\Omega g}{3} t^3$$

O tempo de queda T do topo (altura h) satisfaz $h = \frac{1}{2}gT^2$, logo

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Substituindo em $x(t)$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Omega g}{3} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\Omega g}{3} \frac{(2h)^{3/2}}{g^{3/2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \Omega \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \Omega \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \end{aligned}$$

Assim, temos o valor para $h = 5$ [km]:

$$x = \frac{2}{3} \times 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}] \sqrt{\frac{2 \times 5000^3 [m^3]}{9.81 [m s^{-2}]} } = 7.76 [m]$$

Logo, o corpo desvia aproximadamente 7.76 [m] para leste.

Exercício 5.5.

O Gervásio e a Hortelinda vão num passeio caçar aves com um revólver que dispara balas a $320 [m s^{-1}]$, perto de Sintra ($\varphi = 38.5^\circ$). A certa altura a Hortelinda avista uma ave a passar o seu zénite e dispara uma bala na vertical, falhando o pássaro. Sabendo que o Gervásio se encontrava a cerca de 26 [m] a Este da Hortelinda, estará ele em perigo de ser atingido pela bala e morrer? Despreze a resistência do ar, o gradiente de pressão e $f'u$ comparado com g na equação vertical. (Considere a velocidade angular terrestre $\Omega = 7.292 \times 10^{-5} [s^{-1}]$).

Solução:

A bala é disparada verticalmente com velocidade inicial $v_0 = 320 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$. A velocidade vertical (em processo de desaceleração) vem dada por:

$$v_z(t) = v_0 - gt$$

Como $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$, a aceleração de Coriolis na direção leste é

$$a_{CO,x} = -2(\Omega \cos \varphi) v_z$$

Usando $v_z = dz/dt$:

$$\frac{dv_x}{dt} = -2(\Omega \cos \varphi) \frac{dz}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x = -2(\Omega \cos \varphi) z$$

O deslocamento horizontal é

$$x(T) = \int_0^T v_x(t) dt = -2(\Omega \cos \varphi) \int_0^T z(t) dt$$

Com

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad T = \frac{2v_0}{g},$$

obtemos então o integral:

$$\int_0^T z(t) dt = \frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2}$$

Assim, podemos substituir na expressão final:

$$\begin{aligned} x &= -2(\Omega \cos \varphi) \cdot \frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{3} \Omega \cos \varphi \frac{v_0^3}{g^2} \end{aligned}$$

Substituindo valores:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} \times 7.292 \times 10^{-5} \text{ [s}^{-1}\text{]} \times \cos(38.5^\circ) \times \frac{320^3 \text{ [m}^3 \text{ s}^{-3}\text{]}}{9.81^2 \text{ [m}^2 \text{ s}^{-4}\text{]}} \\ &= -25.9 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

O sinal negativo indica que a bala cai $\sim 26 \text{ [m]}$ a Oeste do ponto de disparo. Logo, estando o Gervásio a 26 [m] a Este da Hortelinda, ele não é atingido.

Exercício 5.6.

Admitindo um escoamento horizontal, calcule a tendência da temperatura num ponto fixo num domínio com as seguintes condições:

- Vento Norte com $10 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$ e um gradiente horizontal de temperatura de $5 \text{ [}^\circ\text{C]}/100 \text{ [km]}$ a aumentar de Norte para Sul.
- Vento Norte com $10 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$ e um gradiente horizontal de temperatura de $5 \text{ [}^\circ\text{C]}/100 \text{ [km]}$ a aumentar de Este para Oeste.
- Vento Norte com $10 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$ e um gradiente horizontal de temperatura de $5 \text{ [}^\circ\text{C]}/100 \text{ [km]}$ a aumentar de Noroeste para Sudeste.

Solução:

Tomemos um referencial local com x para Este e y para Norte. A tendência térmica por advecção (escoamento horizontal) é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(u \partial_x T + v \partial_y T).$$

Neste problema o vento é do Norte com velocidade 10 m s^{-1} , ou seja $\mathbf{v} = (u, v) = (0, -10) \text{ m s}^{-1}$. A intensidade do gradiente é $5 \text{ }^\circ\text{C}/100 \text{ km} = 5 \times 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$.

a) Gradiente a aumentar de Norte para Sul:

Como a temperatura aumenta para Sul, ao subir (direção Norte, $+y$) a temperatura diminui, logo

$$\partial_y T = -5 \times 10^{-5} \text{ K m}^{-1}.$$

Assim a tendência é

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(0 \cdot \partial_x T - 10 \cdot \partial_y T) = 10 \cdot (-5 \times 10^{-5}) = -5 \times 10^{-4} \text{ K s}^{-1}.$$

Em unidades mais usuais:

$$-5 \times 10^{-4} \text{ K s}^{-1} = -5 \times 10^{-4} \times 3600 \text{ K h}^{-1} = -1.80 \text{ K h}^{-1}.$$

Portanto o ponto arrefece a $+1.80 \text{ }^\circ\text{C h}^{-1}$ (arrefecimento por advecção).

b) Gradiente a aumentar de Este para Oeste:

Aqui a componente este-oeste do gradiente é a de x ; portanto

$$\partial_x T = -5 \times 10^{-5} \text{ K m}^{-1}, \quad \partial_y T = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(0 \cdot \partial_x T + 10 \cdot 0) = 0 \text{ K s}^{-1}.$$

Não há tendência térmica local por advecção (o vento é perpendicular ao gradiente).

c) Gradiente a aumentar de Noroeste para Sudeste:

A direção Noroeste $\rightarrow$ Sudeste corresponde ao vetor com componentes proporcionais a $(+1, -1)$ em (Este, Norte). Assumindo que o módulo do gradiente ao longo dessa direção é $5 \times 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$, as componentes cartesianas são

$$\begin{aligned} \partial_x T &= \frac{5 \times 10^{-5}}{\sqrt{2}} \text{ K m}^{-1}, \\ \partial_y T &= -\frac{5 \times 10^{-5}}{\sqrt{2}} \text{ K m}^{-1}. \end{aligned}$$

(o sinal negativo em $\partial_y T$ corresponde à diminuição para Norte). Assim a tendência é

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(0 \cdot \partial_x T + 10 \cdot \partial_y T) = -10 \left(-\frac{5 \times 10^{-5}}{\sqrt{2}} \right) = 3.5355 \times 10^{-4} \text{ K s}^{-1}.$$

Em unidades mais usuais:

$$3.5355 \times 10^{-4} \times 3600 = 1.27 \text{ K h}^{-1}.$$

Ou seja, o ponto aquece a aproximadamente $+1.27 \text{ }^\circ\text{C h}^{-1}$.

Exercício 5.7.

Numa zona da atmosfera observa-se um gradiente vertical de temperatura de $-4 [^{\circ}\text{C}/\text{km}]$ e um gradiente horizontal de $2 [^{\circ}\text{C}]/100 [\text{km}]$, com a temperatura a decrescer de Sul para Norte.

a) Calcule a tendência da temperatura para um escoamento horizontal de Nordeste com velocidade de $10 [\text{m s}^{-1}]$, admitindo que se trata de um escoamento isotérmico.

b) Se o escoamento anterior for acompanhado por subsidência com uma velocidade descendente de $5 [\text{cm s}^{-1}]$, que impacto espera sobre a tendência da temperatura: a subsidência contribuirá para aquecimento ou arrefecimento? Nota: Não esquecer o efeito da compressão adiabática.

Solução:

Partindo da expressão que nos dá tendência da temperatura, temos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -u \frac{\partial\theta}{\partial x} - v \frac{\partial\theta}{\partial y} - w \frac{\partial\theta}{\partial z}$$

a) Como o gradiente horizontal de temperatura tem direção Sul para Norte (negativo, portanto) e é um escoamento isotérmico, podemos ignorar as componentes zonais e verticais da equação. Assim, para considerarmos a componente meridional do escoamento, que tem direção de Nordeste, consideramos:

$$v = -10 [\text{m s}^{-1}] \times \sin 45^{\circ}$$

E, obtemos uma tendência de:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= -v \frac{\partial\theta}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -(-10 [\text{m s}^{-1}] \times \sin 45^{\circ}) \times \frac{-2 [\text{K}]}{10^5 [\text{m}]} \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -1.414 \times 10^{-4} [^{\circ}\text{C s}^{-1}] = -0.509 [^{\circ}\text{C h}^{-1}]\end{aligned}$$

b) De forma similar à alínea anterior, mas desta vez considerando a subsidência, temos então que considerar ainda a compressão adiabática (onde $\theta = T$, por estarmos à pressão de referência):

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right) = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}$$

Substituindo na expressão final:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= -v \frac{\partial\theta}{\partial y} - w \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right) \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -(-10 [\text{m s}^{-1}] \times \sin 45^{\circ}) \times \frac{-2 [\text{K}]}{10^5 [\text{m}]} - (-0.05 [\text{m s}^{-1}]) \left(\frac{-4 [\text{K}]}{10^3 [\text{m}]} + \frac{9.81 [\text{m s}^{-2}]}{1005 [\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]} \right) \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= 1.466 \times 10^{-4} [^{\circ}\text{C s}^{-1}] = 0.528 [^{\circ}\text{C h}^{-1}]\end{aligned}$$

Exercício 5.8.

Considere um campo de temperatura potencial que aumenta $2 [^{\circ}\text{C}]/100 [\text{km}]$ de Oeste para Este e um vento horizontal e constante de Noroeste com $20 [\text{m s}^{-1}]$. Calcule a tendência da temperatura potencial num ponto do domínio admitindo que o escoamento é adiabático e com uma subsidência de $10 [\text{cm s}^{-1}]$, sendo o gradiente de temperatura o da Atmosfera padrão ($-6.5 [\text{K}/\text{km}]$).

Solução:

Usando a expressão do exercício anterior, podemos aplicar apenas com a componente zonal (gradiente horizontal de temperatura) e com a horizontal. Assim, o vento zonal é dado por:

$$u = 20 [\text{m s}^{-1}] \times \cos 45$$

Assim, podemos aplicar:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - w \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(20 \text{ [m s}^{-1}\text{]} \times \cos 45^\circ) \times \frac{-2 \text{ [K]}}{10^5 \text{ [m]}} - (-0.1 \text{ [m s}^{-1}\text{]}) \left(\frac{-6.5 \text{ [K]}}{10^3 \text{ [m]}} + \frac{9.81 \text{ [m s}^{-2}\text{]}}{1005 \text{ [J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}\text{]}} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.433 \times 10^{-4} \text{ [}^\circ\text{C s}^{-1}\text{]} = 0.156 \text{ [}^\circ\text{C h}^{-1}\text{]}$$