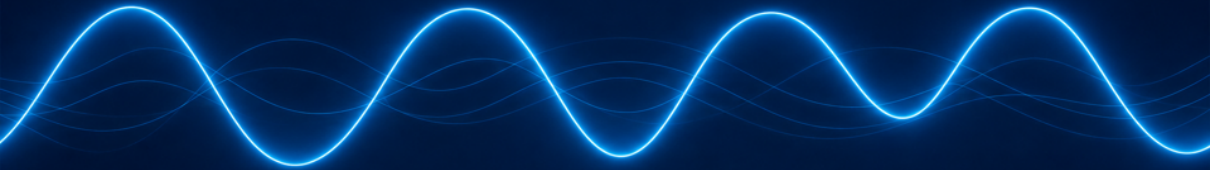
OSCILADOR HARMÓNICO

A origem das ondas: das oscilações à propagação



Porque estudar oscilações?

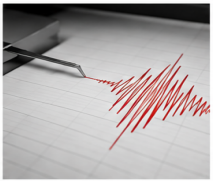
- Oscilações estão presentes em praticamente todos os ramos da **Física** e da **Tecnologia**.
- São **essenciais** para compreender fenómenos naturais e para projetar dispositivos.
- Permitem descrever sistemas que armazenam e transferem **energia** de forma eficiente.
- Constituem a base para o estudo de **ondas, vibrações** e muitos outros fenómenos.
- Um dos modelos mais simples e fundamentais é o **oscilador harmónico**.



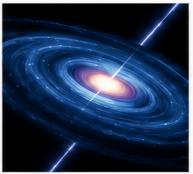
Diapasão a vibrar



Oscilações em estruturas



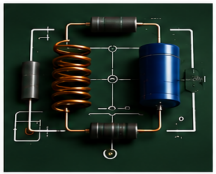
Ondas sísmicas



Oscilações em astrofísica



Membrana de um altifalante

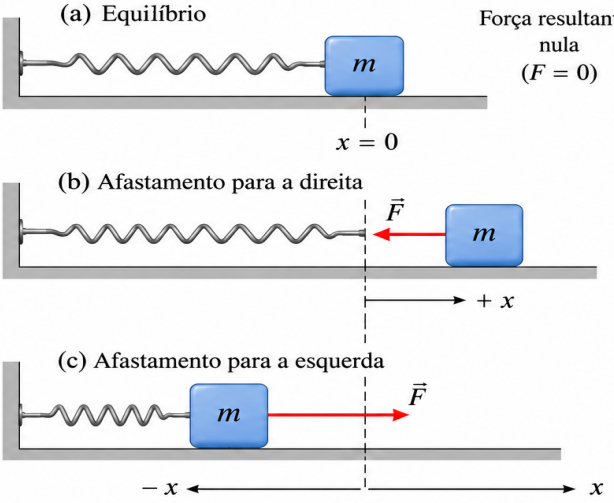


Oscilador elétrico

Equilíbrio e perturbação

Posição de equilíbrio e afastamento

- Todo o sistema oscilatório possui uma posição de **equilíbrio**.
- Nesta posição, a força resultante sobre o sistema é **nula**.
- Se o sistema for **afastado** dessa posição e depois libertado, ele começa a **oscilar**.
- O afastamento em relação ao equilíbrio chama-se **perturbação** ou **deslocamento**.
- Vamos descrever este movimento e as suas propriedades.

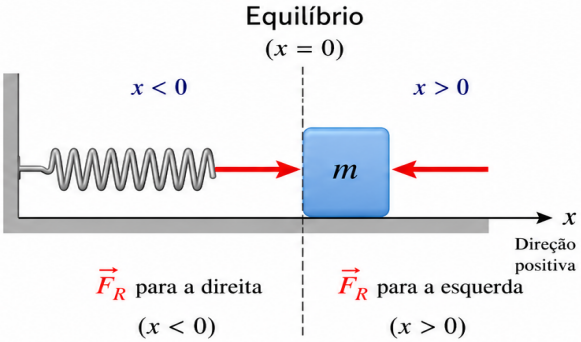


Força restauradora

O que faz o sistema regressar ao equilíbrio

- Quando o sistema é afastado da posição de equilíbrio, surge uma **força resultante** que atua sobre ele.
- Essa força tem sempre direção tal que empurra o sistema **de volta para o equilíbrio.**
- Designa-se por **força restauradora** ou **força de restituição.**
- Sem esta força, o sistema não oscilaria: permaneceria na nova posição.
- A força restauradora é a **origem do movimento oscilatório.**

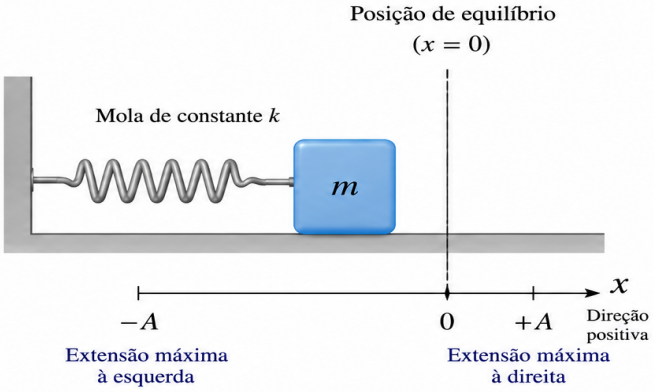
A força restauradora aponta **sempre** no **sentido oposto** ao afastamento e tende a anular a perturbação.



O sistema massa–mola

Modelo físico fundamental

- O sistema massa–mola é o modelo mais simples de um **oscilador**.
- Uma massa m está ligada a uma mola de **constante elástica** k.
- A massa move-se numa linha horizontal **sem atrito**.
- A mola está fixa a uma **parede** rígida e idealmente sem massa.
- Quando a massa é afastada da posição de equilíbrio e libertada, o sistema **oscila harmonicamente**.



A é a **amplitude** da oscilação

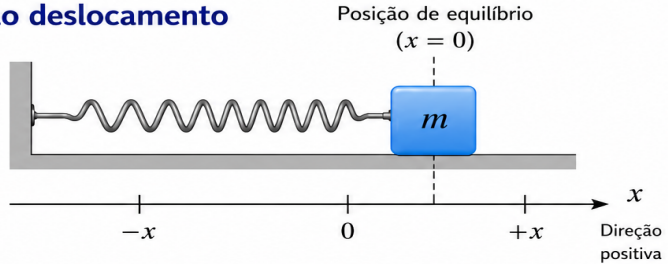
Lei de Hooke

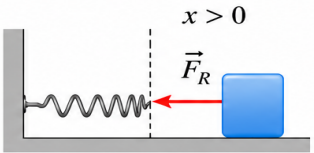
Força restauradora proporcional ao deslocamento

- A mola exerce sobre a massa uma força **proporcional** ao seu **afastamento** do equilíbrio.
- Seja x o deslocamento da massa a partir do equilíbrio (**positivo para a direita**).
- A força restauradora é dada por:

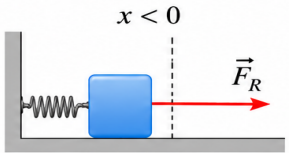
$$\vec{F}_R = -\,k\,x\,\vec{u}_x$$

- k é a **constante elástica** da mola ($\mathrm{N/m} = \mathrm{kg/s^2}$).
- O sinal negativo indica que a força tem sempre direção **oposta** ao deslocamento.





A força aponta para a esquerda



A força aponta para a direita

Equação do movimento

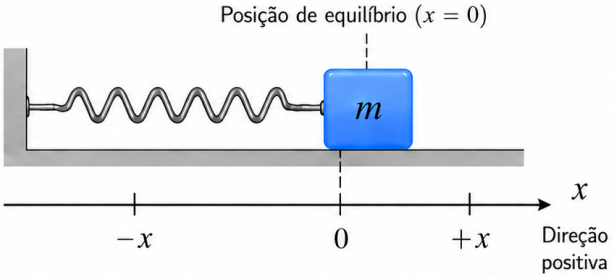
Aplicação da segunda lei de Newton

- Sistema massa–mola sem atrito ao longo do eixo x.
- Deslocamento da massa: $x(t)$ a partir do equilíbrio ($x = 0$).
- Força restauradora (**lei de Hooke**):

$$\vec{F}_R = -k\,x\,\vec{u}_x$$

- **Segunda lei de Newton**:

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_R = -k\,x\,\vec{u}_x$$



Desenvolvendo:

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \quad \Rightarrow \quad \text{Dividindo por } m:$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x \quad \Rightarrow \quad \text{Definindo } \omega^2 = \frac{k}{m}:$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Equação do movimento do oscilador harmónico}$$

Solução do movimento

Forma sinusoidal da oscilação

- A equação do movimento do oscilador harmónico simples é:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

- A sua solução geral é uma função sinusoidal:

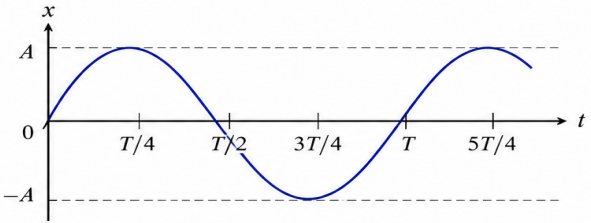
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

ou, equivalentemente,

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi')$$

- onde:
  - A é a **amplitude** da oscilação ($A > 0$);
  - $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a **frequência angular própria**;
  - φ é a **fase inicial** (rad).
- A solução descreve um movimento periódico que se repete de forma contínua no tempo.

Deslocamento em função do tempo



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ período da oscilação

Características da solução

- $x(t)$ é uma função **sinusoidal** do tempo.
- O movimento é **limitado** entre $-A$ e $+A$.
- A forma da oscilação depende apenas de A, ω e φ.
- A energia mecânica total permanece **constante**.

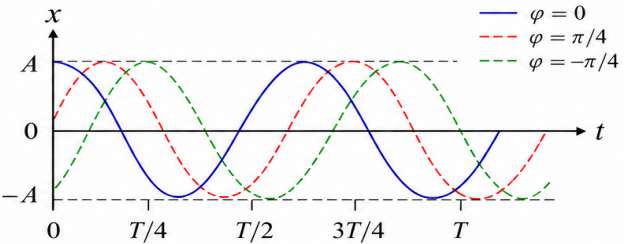
Amplitude e fase

Significado físico dos parâmetros

- **Amplitude A**
  - Caracteriza a escala do movimento.
  - Quanto maior for A, maior é o afastamento máximo da posição de equilíbrio.
  - Tem unidades de comprimento (m).
- **Fase φ**
  - Determina o estado inicial do oscilador (posição e velocidade no instante inicial).
  - Valores diferentes de φ correspondem ao mesmo movimento com um desfasamento temporal.
  - Tem unidades de radianos (rad).

Efeito da fase

Deslocamento $x(t)$ para diferentes valores de φ



Condições iniciais e determinação de A e φ

Dados $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$, então

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{array}$$

Período e frequência – descrição temporal da oscilação

Movimento periódico

- O movimento harmónico simples é **periódico**: repete-se de forma idêntica ao longo do tempo.
- A solução geral é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Período T

- É o intervalo de tempo necessário para que o sistema complete uma **oscilação**.
- Após um período T, o estado do sistema repete-se:

$$x(t+T) = x(t)$$

- Da expressão da solução:

$$\cos[\omega(t+T)+\varphi] = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

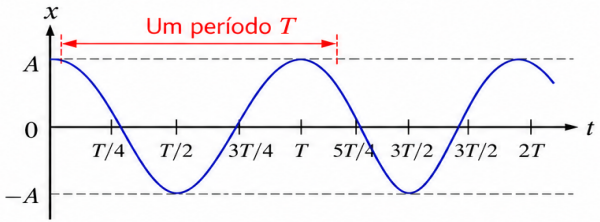
Frequência f

- Número de oscilações completas por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Unidade SI: hertz (Hz) $\qquad 1\ \text{Hz} = 1\ s^{-1}$

Deslocamento em função do tempo



Frequência angular ω

- Relaciona o período T com a frequência angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- Tem unidade SI: rad s^{-1} (radianos por segundo).
- Quanto maior ω, mais rápida é a oscilação.

Frequência angular

Relação entre f e ω

- No movimento harmónico simples, o deslocamento é dado por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- A função trigonométrica completa um ciclo quando o seu argumento aumenta de 2π:

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

- Daí resulta

$$\omega T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

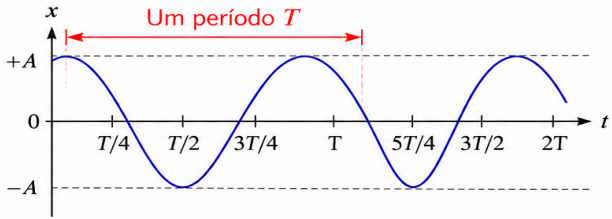
- A frequência f é o número de ciclos por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T}$$

- Substituindo T, obtemos

$$\omega = 2\pi f$$

Interpretação temporal



Em cada intervalo de duração T, ocorre uma oscilação completa.

Quanto maior ω, mais rápida é a oscilação.

Unidades

- Frequência angular ω: rad s^{-1} (radianos por segundo).
- Frequência f: hertz (Hz) $= s^{-1}$.
- 1 Hz $= 1$ ciclo por segundo.

Velocidade no movimento harmónico

Derivada temporal do deslocamento

- A velocidade é a derivada temporal do deslocamento:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- Derivando $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, obtemos

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

- A amplitude da velocidade é

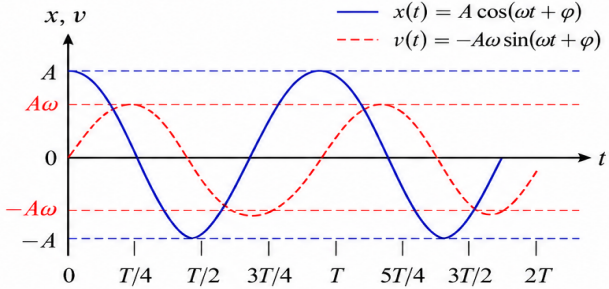
$$v_{\max} = A\omega$$

- Relação entre velocidade e deslocamento

$$v^2 = \omega^2 \left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow$$

A velocidade é máxima em $x = 0$ e nula em $x = \pm A$.

Deslocamento e velocidade em função do tempo



Resumo das grandezas

Grandeza	Expressão	Amplitude	Unidades (SI)
Deslocamento $x(t)$	$A\cos(\omega t + \varphi)$	A	m
Velocidade $v(t)$	$-A\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$A\omega$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Aceleração $a(t)$	$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$	$\omega^2 A$	$\mathrm{m\,s^{-2}}$

Aceleração no movimento harmónico

Relação entre aceleração e deslocamento

- No movimento harmónico simples, a aceleração é a derivada temporal da velocidade:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

- Como $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$, derivando obtemos

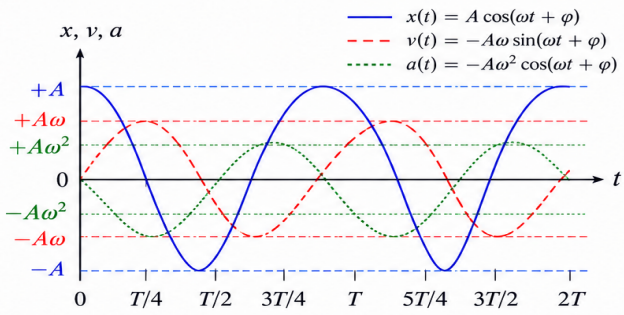
$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

- Comparando com $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, resulta a relação fundamental

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

- Consequências imediatas:
  - Em $x = 0$, $a = 0$ (aceleração nula).
  - Em $x = +A$, $a = -\omega^2 A$ (aceleração máxima para a esquerda).
  - Em $x = -A$, $a = +\omega^2 A$ (aceleração máxima para a direita).

Deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo



- A aceleração está em oposição de fase com o deslocamento.
- A aceleração está em quadratura de fase com a velocidade (diferença de fase de $\pi/2$).
- A forma da aceleração é sinusoidal com a mesma frequência ω.

Energia cinética

Energia associada ao movimento

- A energia cinética é a energia devida ao movimento do sistema.
- No movimento harmónico simples, a velocidade é

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

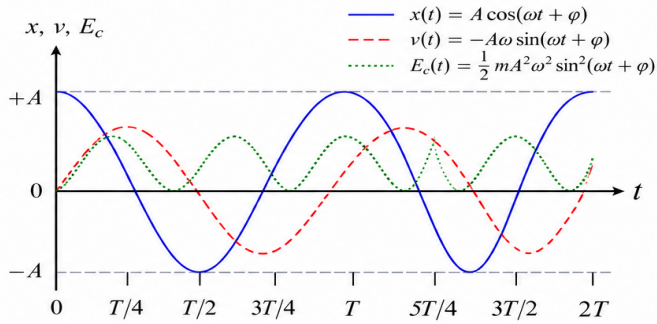
- A energia cinética é

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

- Substituindo $v(t)$, obtém-se

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \left(A\omega \sin(\omega t + \varphi)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Deslocamento, velocidade e energia cinética em função do tempo



Propriedades importantes

- E_c é máxima quando a velocidade é máxima ($x = 0$): $E_{c,\max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$.
- E_c é nula nas posições extremas ($x = \pm A$), onde o sistema inverte o sentido do movimento.
- E_c varia com o dobro da frequência angular: $E_c\left(t + \frac{T}{2}\right) = E_c(t)$, pois $\sin^2\theta$ tem período π.

Energia potencial elástica

Energia armazenada na mola

- Quando a mola é esticada ou comprimida, ela armazena energia.
- Pela lei de Hooke, a força restauradora é

$$F_x = -kx$$

k – constante elástica
x – deslocamento

- A energia potencial elástica é definida por

$$U(x) = -\int_0^x F_x \, dx$$

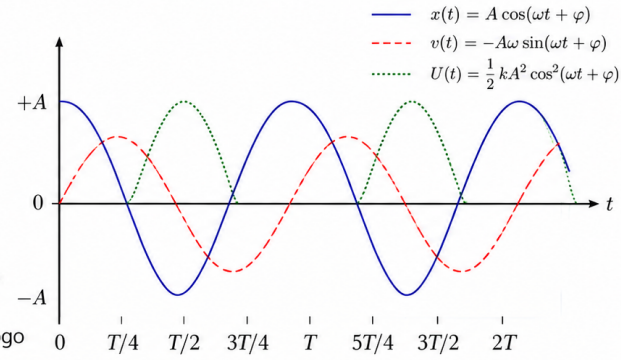
- Substituindo $F_x = -kx$, obtemos

$$U(x) = -\int_0^x (-kx') \, dx' = \int_0^x kx' \, dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

- No movimento harmónico simples, $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, logo

$$U(t) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Deslocamento, velocidade e energia potencial elástica em função do tempo



Propriedades importantes

- $U(x)$ é mínima no equilíbrio ($x = 0$): $U_{\min} = 0$.
- $U(x)$ é máxima nas posições extremas ($x = \pm A$): $U_{\max} = \frac{1}{2} kA^2$.
- Nos extremos, a mola armazena toda a energia.

Conservação da energia

Transformação entre energia cinética e potencial

- No movimento harmónico simples (massa–mola), a energia mecânica total é constante.
- As energias cinética e potencial elástica são dadas por

Energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

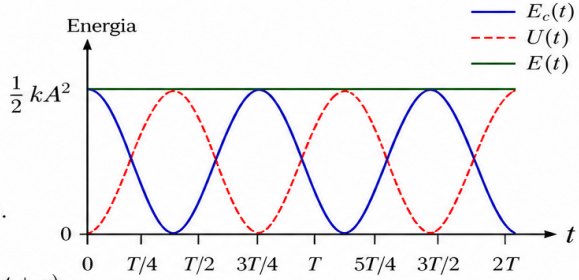
Energia potencial elástica

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

- No MHS: $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ e $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.
- Substituindo, obtém-se

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) \qquad U(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Evolução temporal das energias



- Como $k = m\omega^2$, a energia mecânica total é

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right]$$
$$= \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$

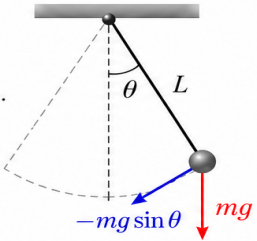
Consequências importantes

- A energia mecânica total é constante e depende apenas da amplitude A.
- A energia transfere-se continuamente entre cinética e potencial.
- Se não houver forças dissipativas, o movimento é perpetuamente oscilatório.

O pêndulo simples

Outro sistema oscilatório

- Consiste numa massa m suspensa por um fio inextensível e de massa desprezável, de comprimento L.
- Ao ser afastada da posição de equilíbrio, a massa descreve um movimento oscilatório em torno da vertical.



Período de oscilação

O período de um pêndulo simples (para pequenas amplitudes) é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Independe da massa m e, para pequenas amplitudes, independente da amplitude.

Equação do movimento (pequenas amplitudes)

- A componente tangencial da força é

$$F_t = -mg\sin\theta.$$

- Equação do movimento angular:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta$$

- Para pequenas amplitudes ($\sin\theta \approx \theta$ em radianos):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \implies \theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

- Frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\text{rad s}^{-1})$$

Propriedades importantes

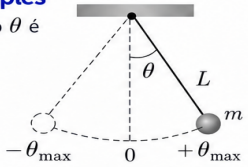
- Aproximação válida: $|\theta_0| \leq 10°$ (aprox.).
- Para amplitudes maiores, o período aumenta ligeiramente (não é mais dado pela expressão simples).
- Exemplo numérico: para $L = 1\,\text{m}$, $T \approx 2.01\,\text{s}$ (com $g = 9.81\,\text{m s}^{-2}$).

Pequenas oscilações do pêndulo

1. Equação exacta do pêndulo simples

- A equação do movimento para o ângulo θ é

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$



2. Linearização para pequenos ângulos

- Para oscilações de pequena amplitude ($|\theta| \ll 1$ rad), podemos usar a expansão de Taylor:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

- Retendo apenas o primeiro termo (aproximação harmónica):

$$\sin\theta \approx \theta \qquad (|\theta| \ll 1 \text{ rad})$$

3. Equação linearizada

- Substituindo $\sin\theta \approx \theta$ na equação exacta:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

- Está é a equação do movimento harmónico simples (MHS).

4. Solução e frequência

- A solução geral é

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\text{rad s}^{-1})$$

- e período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- O período depende apenas de L e g (não depende de m nem da amplitude, na aproximação).

5. Validade da aproximação

- A aproximação harmónica é válida para

$$|\theta| \leq 10^\circ \qquad (\approx 0{,}175 \text{ rad})$$

- Para amplitudes maiores, o movimento deixa de ser estritamente harmónico e o período aumenta.
- Exemplo numérico: para $L = 1$ m, $T \approx 2{,}01$ s (com $g = 9{,}81$ m s^{-2}).

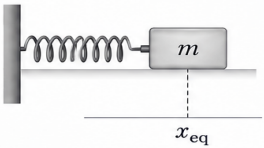
O que há de comum nos osciladores?

Equilíbrio, força restauradora e frequência própria

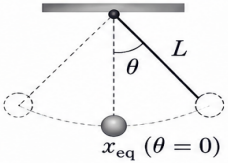
Equilíbrio

- Todos os osciladores possuem uma posição de equilíbrio estável x_{eq}.
- No equilíbrio, a força resultante é nula.

Massa–mola



Pêndulo simples



Força restauradora

- Para pequenas oscilações, a força resultante tem sempre a forma

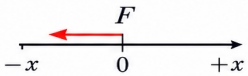
$$F = -k\,(x - x_{\text{eq}})$$

com $k > 0$ constante elástica efetiva.

Massa–mola

$$F = -kx$$

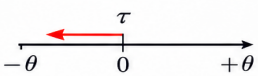
(Lei de Hooke)



Pêndulo simples
(pequenos ângulos)

$$F_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

ou $\tau = -mgL\theta$



Frequência própria

- O sistema oscila com uma frequência angular própria ω_0, que depende apenas das suas propriedades físicas (massa, rigidez, comprimento, gravidade, ...).
- A solução para pequenas oscilações é harmónica:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Exemplos

Massa–mola

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pêndulo simples
(pequenos ângulos)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

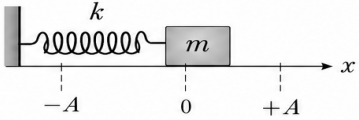
Exercício resolvido I

Oscilador massa–mola: período e energia

Enunciado: Uma massa $m = 0{,}50\ \text{kg}$ está ligada a uma mola ideal de constante elástica $k = 200\ \text{N/m}$ e oscila sobre uma superfície horizontal sem atrito. A amplitude do movimento é $A = 0{,}080\ \text{m}$.

a) Determine o período T e a frequência f das oscilações.

b) Calcule as energias cinética e potencial elástica no instante em que o deslocamento é $x = 0{,}040\ \text{m}$.



1. Período e frequência

- Para um oscilador massa–mola:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Substituindo os valores:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{200}{0{,}50}} = \sqrt{400} = 20{,}0\ \text{rad/s}$$

- O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20{,}0} = 0{,}314\ \text{s}$$

- A frequência é

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}314} = 3{,}18\ \text{Hz}$$

Resposta (a): $T = 0{,}314\ \text{s}$ e $f = 3{,}18\ \text{Hz}$

2. Energias para $x = 0{,}040\ \text{m}$

- A energia mecânica total é constante e vale

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(200)(0{,}080)^2 = 0{,}640\ \text{J}$$

- A energia potencial elástica no deslocamento x é

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200)(0{,}040)^2 = 0{,}160\ \text{J}$$

- A energia cinética é

$$K(x) = E - U(x) = 0{,}640 - 0{,}160 = 0{,}480\ \text{J}$$

Resposta (b): $U = 0{,}160\ \text{J}$ e $K = 0{,}480\ \text{J}$

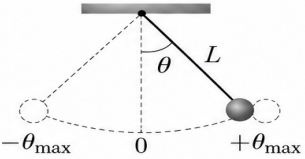
Exercício resolvido II

Pêndulo simples: período para pequenas oscilações

Enunciado: Um pêndulo simples tem comprimento $L = 1{,}20\ \mathrm{m}$.
Para pequenas oscilações, determine:

a) A frequência angular ω_0, o período T e a frequência f das oscilações.

b) O período do pêndulo na Lua, onde a aceleração gravitica é $g_L = 1{,}62\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.



1. Movimento para pequenas oscilações

- Para $|\theta| \ll 1$ rad, o pêndulo simples realiza um movimento harmónico simples com frequência angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- O período é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- e a frequência é

$$f = \frac{1}{T}$$

2. Valores na Terra ($g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$)

- Frequência angular:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}20}} = 2{,}86\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

- Período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}20}{9{,}81}} = 2{,}20\ \mathrm{s}$$

- Frequência:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}455\ \mathrm{Hz}$$

3. Período na Lua ($g_L = 1{,}62\ \mathrm{m\,s^{-2}}$)

- Período:

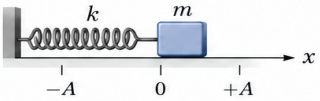
$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}20}{1{,}62}} = 5{,}41\ \mathrm{s}$$

- Frequência:

$$f_L = \frac{1}{T_L} = 0{,}185\ \mathrm{Hz}$$

Exercício resolvido III

Uma massa $m = 0{,}20$ kg está ligada a uma mola ideal de constante elástica $k = 80$ N m^{-1}.
A massa é afastada 5,0 cm da posição de equilíbrio e libertada do repouso.

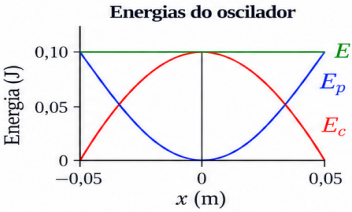


a) Determine a frequência angular e o período.

b) Determine a energia mecânica total do oscilador.

c) Quando a massa passa pela posição $x = 3{,}0$ cm, qual é a sua velocidade?

d) Em que posição a energia cinética é igual à energia potencial?



Resultados (contas principais)

a)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}314 \text{ s}$$

b)

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$= 0{,}100 \text{ J}$$

c)

$$v = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2}$$

$(x = 3{,}0 \text{ cm})$

$$v = 0{,}80 \text{ m s}^{-1}$$

d)

$$E_c = E_p \Rightarrow |x| = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$|x| = 3{,}54 \text{ cm}$$