

Análise Matemática III

Ficha 1 — Corpo dos números reais

- 1.1. Existem corpos com apenas dois elementos? Com três elementos? Com quatro elementos?
- 1.2. Seja $(X, \leq)$ um conjunto (parcialmente) ordenado. Sejam A e B dois subconjuntos de X , $A \subset B$. O que se pode dizer dos conjuntos dos majorantes de A e de B ? Um deles está incluído no outro?
- 1.3. Seja $(X, \leq)$ um conjunto (parcialmente) ordenado. Sejam A e B dois subconjuntos de X , $A \subset B$. Se os máximos existirem, podemos afirmar uma desigualdade entre eles? Se os mínimos existirem, podemos afirmar uma desigualdade entre eles?
- 1.4. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A \subset B$. Prove uma desigualdade entre $\inf A$ e $\inf B$. Prove uma desigualdade entre $\sup A$ e $\sup B$.
- 1.5. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais e defina-se o conjunto $C \subset \mathbb{R}$ por

$$C := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Demonstre que se A e B forem majorados, então C também o é, e tem-se

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

Há igualdade?

- 1.6. Demonstre que a equação $x^2 = 2$ não tem soluções racionais.
- 1.7. Calcule o mínimo, máximo, ínfimo e supremo dos conjuntos
- (a) $[0, 1]$
 - (b) $]0, 1[$
 - (c) $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$
 - (d) $]0, 1[\setminus \mathbb{Q}$
 - (e) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$
 - (f) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n} \right[$
 - (g) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-3}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup]0, 2[$

- 1.8. Sejam A e B dois conjuntos de números reais e não vazios tais que $a \leq b$ para todo o $a \in A$ e todo o $b \in B$.
- (a) Justifique que $\sup A, \inf B$ existem e são finitos; mostre que $\sup A \leq \inf B$.
 - (b) Se $a < b$ para todo o $a \in A$ e $b \in B$, podemos concluir que $\sup A < \inf B$?
- 1.9. Sejam A e B dois conjuntos de números reais e não vazios tais que para todo o $a \in A$ existe um $b \in B$ tal que $a \leq b$. O que podemos afirmar sobre os respectivos ínfimos e supremos?